Министерство образования Московской области
Государственное образовательное учреждение высшего образования
Московской области
«Государственный гуманитарно-технологический университет»

УТВЕРЖДАЮ
проректор

20 мая 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.07.03
Элементарная математика с практикумом по решению задач

Направление подготовки	**44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**
Направленность (профили) программы	**Математика, Информатика**
Квалификация выпускника	**Бакалавр**
Форма обучения	**Очная**

Орехово-Зуево

2022 г.

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа дисциплины составлена на основе учебного плана 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) по профилям Математика, Информатика 2022 года начала подготовки.

2.ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Цели дисциплины

Целью освоения дисциплины «Элементарная математика с практикумом по решению задач» является формирование у студентов необходимых компетенций, позволяющих:

1. привести в определенную систему знания школьного курса математики;
2. пополнить знания школьного курса математики новыми интересными фактами.

Задачи дисциплины

1. Содействовать средствами дисциплины «Элементарная математика с практикумом по решению задач» развитию у студентов мотивации к педагогической деятельности, профессионального мышления, коммуникативной готовности, общей культуры;
2. сформировать навыки решения задач школьного курса математики различного уровня.

Знания и умения обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент должен обладать следующими компетенциями:	Коды формируемых компетенций
Универсальные компетенции (ОПК):	
Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ОПК-8
Профессиональные компетенции (ПК):	
Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1

Индикаторы достижения компетенции

Код и наименование компетенции	Наименование индикатора достижения компетенции
ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	**ОПК-8.1** Применяет методы анализа педагогической ситуации, профессиональной рефлексии на основе специальных научных знаний, в том числе в предметной области. **ОПК-8.2** Проектирует и осуществляет учебно-воспитательный процесс с опорой на знания предметной области, психолого-педагогические знания и научно-обоснованные закономерности организации образовательного процесса.
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и	**ПК-1.1** Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). **ПК-1.2** Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в

практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО. **ПК-1.3** Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина Б1.О.07.03 Элементарная математика с практикумом по решению задач относится к модулю «Предметно-методический по математике» обязательной части блока 1 Дисциплины (модули).

Программа курса предполагает наличие у студентов знаний по дисциплинам школьного курса математики.

Дисциплины, для изучения которых необходимы знания данного курса: «Геометрия», «Алгебра», «Математический анализ».

4. Структура и содержание дисциплины

№ п/п	Раздел/тема	Семестры	Всего	Виды учебных занятий			Промежуточная аттестация
				Контактная работа		СРС	
				ЛК (лекции)	ПЗ (практич. занятия)		
1	Тема 1. Тождественные преобразования выражений	1	24		12	12	
2	Тема 2. Уравнения и неравенства	1	24		12	12	
3	Тема 3. Тригонометрия	1	24		12	12	
4	Тема 4. Планиметрия	1	36		18	18	
5	Тема 5. Стереометрия	1	36		18	18	
	Промежуточная аттестация – зачет						
	Итого		**144**		**72**	**72**	

Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

Практические занятия

Практическое занятие 1,2

Тема: ***Тождественные преобразования выражений***

Учебные цели:

- научится выполнять тождественные преобразования рациональных выражений;

– овладеть навыком нахождения области определения рационального выражения.

Основные термины и понятия:

а. Тождество
б. Тождественные преобразования
в. Рациональные выражения
г. Область определения

Практическое занятие 3,4

Тема: ***Тождественные преобразования выражений***

Учебные цели:

– научится выполнять тождественные преобразования иррациональных выражений;
– овладеть навыком нахождения области определения иррационального выражения;
– научиться освобождаться от иррациональности в знаменателе.

Основные термины и понятия:

а. Тождество
б. Тождественные преобразования
в. Иррациональные выражения
г. Арифметический корень

Практическое занятие 5,6

Тема: ***Уравнения и неравенства***

Учебные цели:

– научится выполнять равносильные преобразования уравнений.

Основные термины и понятия:

а. Уравнение
б. Область определения уравнения
в. Решение уравнения
г. Корень уравнения
д. Посторонний корень
е. Равносильные уравнения
ж. Совокупность уравнений

Практическое занятие 7,8

Тема: ***Уравнения и неравенства***

Учебные цели:

– научиться находить область определения неравенства;
– овладеть основными методами решения неравенств.

Основные термины и понятия:

а. Неравенство
б. Область определения неравенства
в. Решение неравенства
г. Равносильные неравенства

Практическое занятие 9,10

Тема: ***Тригонометрия***

Учебные цели:

– овладеть основными методами решения тригонометрических уравнений;
– научится решать однородные тригонометрические уравнения.

Основные термины и понятия:
а. Уравнение
б. Решение уравнения
в. Корень уравнения
г. Посторонний корень
д. Равносильные уравнения
е. Совокупность уравнений

Практическое занятие 11,12
Тема: *Тригонометрия*
Учебные цели:
- овладеть основными методами решения тригонометрических неравенств.

Основные термины и понятия:
а. Неравенство
б. Решение неравенства
в. Равносильные неравенства

Практическое занятие 13,14
Тема: *Планиметрия*

Учебные цели:
- научиться применять признаки равенства треугольников при решении задач.

Основные термины и понятия:
а. Треугольник
б. Вершины треугольника
в. Стороны треугольника
г. Прямоугольный треугольник
д. Равнобедренный треугольник
е. Равносторонний треугольник

Практическое занятие 15,16
Тема: *Планиметрия*
Учебные цели:
- научиться решать задачи, используя основные свойства линий в треугольнике.

Основные термины и понятия:
а. Высота треугольника
б. Медиана треугольника
в. Биссектриса треугольника
г. Средняя линия треугольника

Практическое занятие 17,18
Тема: *Планиметрия*
Учебные цели:
- овладеть методами решения задач, основанными на теореме Пифагора, теореме синусов и теореме косинусов;
- научиться применять теоремы Пифагора, синусов и косинусов при решении треугольников.

Основные термины и понятия:
а. Теорема Пифагора
б. Теорема синусов
в. Теорема косинусов
г. Катет

д. Гипотенуза
е. Проекция
ж. Перпендикуляр

Практическое занятие 19,20
Тема: *Планиметрия*
Учебные цели:
- научиться решать задачи, используя свойства замечательных точек в треугольнике.

Основные термины и понятия:
а. Ортоцентр треугольника
б. Центр масс треугольника

Практическое занятие 21,22
Тема: *Планиметрия*
Учебные цели:
- научиться находить решения задач, основанные на признаках четырехугольников.

Основные термины и понятия:
а. Параллелограмм
б. Прямоугольник
в. Ромб
г. Квадрат
д. Трапеция

Практическое занятие 23,24
Тема: *Планиметрия*
Учебные цели:
- научиться решать задачи на взаимное расположение прямой и окружности;
- научится решать задачи на взаимное расположение двух окружностей.

Основные термины и понятия:
а. Окружность
б. Радиус окружности
в. Диаметр окружности
г. Центр окружности
д. Хорда
е. Дуга окружности

Практическое занятие 25.26
Тема: *Стереометрия*

Основные термины и понятия:
Параллельность прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.

Практическое занятие 27,28
Тема: *Стереометрия*
Учебные цели:
- научится использовать признак параллельности прямых и плоскостей при решении задач.

Основные термины и понятия:
а. Прямая

б. Плоскость
в. Проекция
г. Скрещивающиеся прямые
д. Параллельность

Практическое занятие 29,30
Тема: ***Стереометрия***
Учебные цели:
- научится использовать признак перпендикулярности прямой и плоскости при решении задач.

Основные термины и понятия:
а. Прямая
б. Плоскость
в. Перпендикуляр
г. Ортогональная проекция
д. Основание перпендикуляра

Практическое занятие 31,32
Тема: ***Стереометрия***
Учебные цели:
- научится решать задачи стереометрии, связанные с призмой, параллелепипедом и кубом.

Основные термины и понятия:
а. Многогранник
б. Грань многогранника
в. Ребро многогранника
г. Вершина многогранника
д. Боковая поверхность
е. Диагональное сечение

Практическое занятие 33,34
Тема: ***Стереометрия***
Учебные цели:
- научится решать задачи стереометрии, связанные с пирамидой и с усеченной пирамидой.

Основные термины и понятия:
а. Основание пирамиды
б. Высота пирамиды
в. Боковые ребра пирамиды
г. Вершины пирамиды
д. Апофема

Практическое занятие 35,36
Тема: ***Стереометрия***
Учебные цели:
- научится решать задачи стереометрии, связанные с цилиндром. конусом и сферой.

Основные термины и понятия:
а. Основание цилиндра (конуса)
б. Боковая поверхность
в. Образующая
г. Осевое сечение

5. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Перечень литературы для организации самостоятельной работы

1. Далингер, В. А. Математика: логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 176 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-05316-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/492730 (дата обращения: 22.05.2022).
2. Далингер, В. А. Математика: тригонометрические уравнения и неравенства: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 136 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08453-5. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/492901 (дата обращения: 22.05.2022).
3. Далингер, В. А. Математика: задачи с модулем: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 364 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04793-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/492899 (дата обращения: 22.05.2022).
4. Гусев, В. А. Геометрия: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Гусев, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 280 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08897-7. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/494638 (дата обращения: 22.05.2022).

Задания для самостоятельной работы.

Рациональные уравнения
Линейные уравнения

Пример 1. Решить уравнение

$$2x - 3 + 4(x - 1) = 5.$$

Решение. Последовательно раскроем скобки, приведём подобные члены и найдём x:

$2x - 3 + 4x - 4 = 5$, $2x + 4x = 5 + 4 + 3$,

$6x = 12$, $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Решить уравнение

$$2x - 3 + 2(x - 1) = 4(x - 1) - 7.$$

Решение. $2x + 2x - 4x = 3 + 2 - 4 - 7$, $0x = -6$.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 3. Решить уравнение.

$$2x + 3 - 6(x - 1) = 4(x - 1) + 5.$$

Решение. $2x - 6x + 3 + 6 = 4 - 4x + 5$,

$-4x + 9 = 9 - 4x$,

$-4x + 4x = 9 - 9$,

$0x = 0$.

Ответ: Любое число.

Системы линейных уравнений

Пример 1. решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$$

Решение. Решить систему линейных уравнений можно способом подстановки, который состоит в том, что какого-либо уравнения системы выражают одно неизвестное через другие неизвестные, а затем подставляют значение этого неизвестного в остальные уравнения.

Из первого уравнения выражаем: $x = (8 – 3y) / 2$. Подставляем это выражение во второе уравнение и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = (8 – 3y) / 2, \\ 3(8 – 3y) / 2 + 2y = 7. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $y = 2$. С учётом этого из первого уравнения $x = 1$.

Ответ: (1; 2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 7. \end{cases}$$

Решение. Система не имеет решений, так как два уравнения системы не могут удовлетворяться одновременно (из первого уравнения $x + y = 3$, а из второго $x + y = 3{,}5$).

Ответ: Решений нет.

Пример 3. решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + 2y = 10. \end{cases}$$

Решение. Система имеет бесконечно много решений, так как второе уравнение получается из первого путём умножения на 2 (т.е. фактически есть всего одно уравнение с двумя неизвестными).

Ответ: Бесконечно много решений.

Пример 4. решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y – z = 2, \\ 2x – y + 4z = 1, \\ -x + 6y + z = 5. \end{cases}$$

Решение. При решении систем линейных уравнений удобно пользоваться методом Гаусса, который состоит в преобразовании системы к треугольному виду.

Умножаем первое уравнение системы на $– 2$ и, складывая полученный результат со вторым уравнением, получаем $– 3y + 6z = – 3$. Это уравнение можно переписать в виде $y – 2z = 1$. Складывая первое уравнение с третьим, получаем $7y = 7$, или $y = 1$.

Таким образом, система приобрела треугольный вид

$$\begin{cases} x + y – z = 2, \\ y – 2z = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Подставляя $y = 1$ во второе уравнение, находим $z = 0$. Подставляя $y = 1$ и $z = 0$ в первое уравнение, находим $x = 1$.

Ответ: (1; 1; 0).

Пример 5. при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a + 1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Решение. Из первого уравнения выражаем x:

$$x = -(a/2)y + a/2 + 1.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$(a + 1)(-(a/2)y + a/2 + 1) + 2ay = 2a + 4.$$

Далее умножим обе части уравнения на 2 и упростим его:

$$(a + 1)(a + 2 - ay) + 4ay = 4a + 8,$$

$$4ay - a(a + 1)y = 4(a + 2) - (a + 1)(a + 2),$$

$$ya(4 - a - 1) = (a + 2)(4 - a - 1),$$

$$ya(3 - a) = (a + 2)(3 - a).$$

Анализируя последнее уравнение, отметим, что при $a = 3$ оно имеет вид $0y = 0$, т.е. оно удовлетворяется при любых значениях y.

Ответ: 3.

Метод введения новых неизвестных
при решении уравнений и систем уравнений

Пример 1. Решим уравнение $12/(x^2 + 2x) - 3/(x^2 + 2x - 2) = 1$.

Решение. Если попробовать привести дробь в левой части уравнения к одному знаменателю, то получим уравнение четвёртой степени, которое мы умеем решать. Чтобы решить заданное уравнение, заметим, что в обе дроби входит одно и то же выражение $x^2 + 2x$. Поэтому введём новое неизвестное y, положив, что $y = x^2 + 2x$. Тогда уравнение примет вид

$12/y - 3/(y - 2) = 1$ или $(y^2 - 11y + 24)/(y(y - 2)) = 0$,

откуда $y_1 = 3$; $y_2 = 8$. Осталось решить уравнения $x^2 + 2x = 3$ (его корни $x_1 = 1$, $x_2 = -3$) и $x^2 + 2x = 8$ (его корни $x_3 = 2$, $x_4 = -4$).

Применённый метод называется методом введения новых неизвестных, и его полезно применять, когда неизвестное входит в уравнение всюду в виде одной и той же комбинации (особенно если эта комбинация содержит степени неизвестного выше первой).

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2/x + 3/y = 8, \\ 5/x - 2/y = 1. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $1/x$ через U, а $1/y$ через V. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 2U + 3V = 8, \\ 5U - 2V = 1, \end{cases}$$

т.е. получится система двух линейных уравнений с двумя неизвестными U и V. Из первого уравнения выражаем U через V: $U = 4 - 3V/2$, и подставляя во второе: $5(4 - 3V/2) - 2V = 1$, откуда $V = 2$. Теперь находим $U = 1$ и решаем уравнения $1/x = 1$, $1/y = 2$.

Ответ: $x = 1$, $y = 0{,}5$.

Пример 3.

$(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680.$

Решение. $(x - 4)(x - 7)\cdot(x - 5)(x - 6) = 1680$, т.е.

$(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680.$

Обозначим $x^2 - 11x + 28 = t$, тогда $t(t + 2) = 1680$, $t2 + 2t - 1680 = 0$, $t_1 = -42$; $t_2 = 40$. Поэтому

$x^2 - 11x + 28 = -42$; $x^2 - 11x + 70 = 0$; $D = 121 - 280 < 0 \Rightarrow x_{1,2} \in \varnothing$.

$x^2 - 11x + 28 = 40$; $x^2 - 11x - 12 = 0$; $x_1 = 12$; $x_2 = -1$.

Ответ: $x_1 = 12$; $x_2 = -1$.

Пример 4.

$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0.$

Решение. Это возвратное уравнение. Разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$, получим

$2x^2 + 3x - 16 + 3 / x + 2 / x^2 = 0$, т.е.

$2(x^2 + 1 / x^2) + 3(x + 1 / x) - 16 = 0$,

обозначим $x + 1 / x = t$, тогда $x^2 + 2 + 1 / x^2 = t^2$, т.е. $x^2 + 1 / x^2 = t^2 - 2$,

получаем

$2(t^2 - 2) + 3t - 16=0$, т.е. $2t^2 + 3t - 20 = 0$, $t_1 = -4$; $t_2 = 5 / 2 = 2,5$.

Следовательно, имеем

$x + 1 / x = -4$; $x^2 + 4x + 1 = 0$; $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$,

$x + 1 / x = 2,5$; $2x^2 - 5x + 2 = 0$; $x_3 = 2$; $x_4 = 1 / 2$.

Ответ: $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$; $x_3 = 2$; $x_4 = 1 / 2$.

Пример 5.

$(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$.

Решение. Сделаем подстановку $x = t - 4$. Тогда получаем $(t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 16$, т.е.

$t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 16$,

т.е. $2t^4 + 12t^2 - 14 = 0$, или $t^4 + 6t^2 - 7 = 0$. Положим $t^2 = z \geq 0$, тогда

$z^2 + 6z - 7 = 0$, $z_1 = -7$; $z_2 = 1$.

С учётом $t^2 = z \geq 0$ отбрасываем z_1. Итак, $z = 1$, т.е. $t^2 = 1$, отсюда $t_1 = -1$; $t_2 = 1$. Следовательно, $x_1 = -1 - 4 = -5$ и $x_2 = 1 - 4 = -3$.

Ответ: $x_1 = -5$ и $x_2 = -3$.

Пример 6.

$13x / (2x^2 + x + 3) + 2x / (2x^2 - 5x + 3) = 6$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дробей на $x \neq 0$:

$13 / (2x + 1 + 3 / x) + 2 / (2x - 5 + 3 / x) = 6$,

обозначим $2x + 3 / x = t$. Получаем $13 / (t + 1) + 2 / (t - 5) = 6$, т.е.

$13t - 65 + 2t + 2 = 6t^2 - 24t - 30$, т.е.

$6t^2 - 39t + 33 = 0$, т.е. $2t^2 - 13t + 11 = 0$,

$t_1 = 1$; $t_2 = 5,5$.

Следовательно:

$2x + 3 / x = 1$; $2x^2 - x + 3 = 0$; $D = 1 - 24 < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$.

$2x + 3 / x = 5,5$; $4x^2 - 11x + 6 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = 0,75$.

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = 0,75$.

Пример 7.

$x^4 - 2x^3 + x - 0,75 = 0$.

Решение. Выделим полный квадрат, прибавив и вычтя в левой части уравнения x^2:

$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + x - 0,75 = 0$, т.е.

$(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - 0,75 = 0$.

Пусть $x^2 - x = t$, тогда $t^2 - t - 0,75 = 0$, $x_1 = -0,5$; $x_2 = 1,5$.

Возвращаясь к старой переменной, получаем:

$x^2 - x = -0,5$; $x^2 - x + 0,5 = 0$; $D = 1 - 2 < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$.

$x^2 - x = 1,5$; $x^2 - x - 1,5 = 0$; $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{7}) / 2$.

Ответ: $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{7}) / 2$.

Пример 8.

$x^2 + 81x^2 / (9 + x)^2 = 40$.

Решение. Воспользуемся формулой: $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$ ($(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$). Получаем:

$(x - 9x / (9 + x))^2 + 2x \cdot 9x / (9 + x) = 40$, или

$(x^2 / (9 + x))^2 + 18x^2 / (9 + x) = 40$.

Пусть: $(x^2 / (9 + x)) = t$. Тогда $t^2 + 18t - 40 = 0$, $t_1 = -20$; $t_2 = 2$. Получаем два уравнения:

$(x^2 / (9 + x)) = 2$; $x^2 - 2x - 18 = 0$; $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$,

$(x^2 / (9 + x)) = -20$; $x^2 + 20x + 180 = 0$; $D = 400 - 720 < 0$, $\Rightarrow x \in \varnothing$.

Ответ: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$.

Уравнения и системы уравнений с параметрами

Пример 1. Решим уравнение $px = 6$ с неизвестным x и параметром p. Если $p \neq 0$, то можно разделить обе части уравнения на p, и тогда мы находим корень уравнения $x = 6 / p$. Если $p = 0$, то уравнение корней не имеет, потому что $0 \cdot x = 0$ для любого x.

Ответ: при $p \neq 0$ уравнение имеет единственный корень $x = 6 / p$; при $p = 0$ уравнение корней не имеет.

Пример 2. Сравнить: $-a$ и $3a$.

Решение. Естественно рассмотреть три случая:

Если $a < 0$, то $-a > 3a$;

Если $a = 0$, то $-a = 3a$;

Если $a > 0$, то $-a < 3a$.

Пример 3. Решить уравнения $ax = 1$.

Решение. На первый взгляд представляется возможным сразу дать ответ: $x = 1 / a$. Однако при $a = 0$ данное уравнение решений не имеет, и верный ответ выглядит так:

Ответ: Если $a = 0$, то нет решений; если $a \neq 0$, то $x = 1 / a$.

Пример 4. Решить уравнение $(a2 - 1)x = a + 1$.

Решение. Нетрудно сообразить, что при решении этого уравнения достачно рассмотреть такие случаи:

1) $a = 1$; тогда уравнение принимает вил $0x = 2$ и не имеет решений;
2) $a = -1$; получаем $0x = 0$, и очевидно x — любое.
3) $a \neq \pm 1$; имеем $x = 1 / (a - 1)$.

Сделаем одно замечание. Существенным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем примерам, где решение как бы “ветвится” в зависимости от значений параметра. В подобных случаях составление ответа — это сбор ранее полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения.

Ответ: Если $a = -1$, то x — любое число; $a = 1$, то нет решений; если $a \neq \pm 1$, то $x = 1 / (a - 1)$.

Пример 5. При каких a уравнение $ax^2 - x + 3 = 0$ имеет единственное решение?

Решение. Прежде всего обратим внимание на распространённую ошибку: считать исходное уравнение квадратным. На самом деле это уравнение степени, не выше второй. Пользуясь этим соображением, естественно начать решение, рассмотрев случай, когда $a = {=0}$, то очевидно данное уравнение имеет единственное решение. Если же $a \neq 0$, то имеем дело с квадратным уравнением. Его дискриминант $1 - 12a$ принимает значение, равное нулю, при $a = 1 / 12$.

Ответ: $a = 0$ или $a = 1 / 12$.

Пример 6. при каких a уравнение $(a - 2)x2 + (4 - 2a)x + 3 = 0$ имеет единственное решение?

Решение. Понятно, что надо начинать со случая $a = 2$. Но при $a = 2$ исходное уравнение вообще не имеет решений. Если $a \neq 2$, то данное уравнение — квадратное, и, казалось бы, искомые значения параметра — это корни дискриминанта. Однако дискриминант обращается в нуль при $a = 2$ или $a = 5$. Поскольку мы установили, что $a = 2$ не подходит, то

Ответ: $a = 5$.

Вероятно, в двух последних примерах ничего сложного нет (тем более, ели они уже решены). Однако, на наш взгляд, параметр в этих задачах проявляет своё "коварство", особенно для начинающих. Поэтому полезно рассмотреть ещё несколько примеров, где параметр "расставляет ловушки".

Пример 7. При каких значениях a уравнение $ax^2 + 4x + a + 3 = 0$ имеет более одного корня?

Решение. При $a = 0$ уравнение имеет единственный корень, что не удовлетворяет условию. При $a \neq 0$ исходное уравнение, будучи квадратным, имеет два корня, если его дискриминант $16 - 4a^2 - 12a$ — положительный. Отсюда получаем $-4 < a < 1$. Однако в полученный промежуток $(-4; 1)$ входит число 0, которое, как мы уже проверили, неприемлемо.

Ответ: $-4 < a < 0$ или $0 < a < 1$.

Пример 8. При каких a уравнение $a(a + 3)x^2 + (2a + 6)x - 3a - 9 = 0$ имеет более одного корня?

Решение. Стандартный шаг — начать со случаев $a = 0$ и $a = -3$. При $a = 0$ уравнение имеет единственное решение. Любопытно, что при $a = -3$ решением уравнения служит любое действительное число. При $a = -3$ решением уравнения служит любое действительное число. При $a \neq -3$ и $a \neq 0$, разделив обе части данного уравнения на $a + 3$, получим квадратное уравнение $ax^2 + 2x - 3 = 0$, дискриминант которого $4(1 + 3a)$ положителен при $a > -1 / 3$. Опыт предыдущих примеров подсказывает, что из промежутка $(-1 / 3; \infty)$ надо исключить точку $a = 0$, а в ответ не забыть включить $a = -3$.

Ответ: $a = -3$ или $-1 / 3 < a < 0$, или $a > 0$.

Пример 9. При каких значениях a уравнение $(x^2 - ax + 1) / (x + 3) = 0$ имеет единственное решение?

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Наличие квадратного уравнения и условие единственности решения, естественно приведут к поиску корней дискриминанта. Вместе с тем условие $x \neq -3$ должно привлечь внимание. И "тонкий момент" заключается в том, что квадратное уравнение системы может иметь два корня! Но обязательно только один из них должен равняться -3. Имеем $D = a^2 - 4$, отсюда $D = 0$, если $a = \pm 2$; $x = -3$ — корень уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$ при $a = -10 / 3$, причём при таком значении a второй корень квадратного уравнения отличен от -3.

Ответ: $a = \pm 2$ или $a = - 10 / 3$.

Пример 10. При каких a уравнение $ax^2 = a2$ равносильно неравенству $|x - 3| \geq a$?

Решение. При $a \neq 0$ уравнение имеет единственное решение, а неравенство — бесконечно много. Если $a = 0$, то решением как уравнения, так и неравенства является всё множество действительных чисел. Следовательно, требованию задачи удовлетворяет только $a = 0$.

Ответ: $a = 0$.

Пример 11. Решить уравнение с параметрами

$(a^2 - 9)x = a^2 + 2a - 3$.

Решение. Уравнение имеет смысл при любых значениях параметра. Запишем уравнение в виде:

$(a - 3)(a + 3)x = (a + 3)(a - 1)$.

Если $a = -3$, то уравнение принимает вид: $0x = 0$. Отсюда следует, что при $x \in R$, т.е. решением уравнения является любое действительное число. Если $a \neq -3$, то уравнение принимает вид: $(a - 3)x = a - 1$.При $a = 3$ имеем $0x = 2$. Уравнение решения не имеет. При $a \neq -3$ имеем $x = (a - 1) / (a - 3)$. Уравнение имеет единственное решение (например, $x = 3$ при $a = 4$, $x = 3 / 5$ при $a= - 2$ и т.д.)

Ответ: $a = -3$, $x \in R$; $a = 3$, $x \in \varnothing$; $a \neq \pm 3$, $x = (a - 1) / (a - 3)$.

Пример 12.

$(x - 4) / (x + 1) - 1 / a(x + 1) = -2 / a$.

Решение. Очевидно, $(x + 1)a \neq 0$, т.е. $x \neq -1$, $a \neq 0$. Преобразуем данное уравнение, умножив обе его части на $a(x + 1) \neq 0$:

$(x - 4)a - 1 = -2(x + 1)$, т.е. $(a + 2)x = 4a - 1$.

Если $a = -2$, то имеем $0x = -9$. Следовательно, $x \in \varnothing$. Если $a \neq -2$, то $x = (4a + 1) / (a + 2)$. Но, как мы уже отметили, $x \neq -1$. Поэтому надо проверить, нет ли таких значений a при которых найденное значение x равно -1.

$(4a - 1) / (a + 2) = -1$, т.е. $4a - 1 = -a - 2$, т.е. $5a = -1$, $a= -1 / 5$.

Значит, при $a \neq 0$, $a \neq -2$, $a \neq -1 / 5$ уравнение имеет единственное решение $(4a - 1) / (a + 2)$.

Ответ: $x \in \varnothing$ при $a \in \{-2, 0, -1 / 5\}$; $x = (4a - 1) / (a + 2)$ при $a \notin \{-2, 0, -1 / 5\}$.

Пример 13.

$(a - 5)x^2 + 3ax - (a - 5) = 0$.

Решение. При $(a - 5) = 0$, т.е. $a = 5$ имеем $15x - 0 = 0$, т.е. $x = 0$. При $a - 5 \neq 0$, т.е. $a \neq 5$ уравнение имеет корни

$X_{1,2} = (-3a \pm \sqrt{(9a^2 + 4(a - 5)^2)}) / (2(a - 5))$.

Ответ: $x = 0$ при $a = 5$; $x = (-3a \pm \sqrt{(9a^2 + 4(a - 5)^2)}) / (2(a - 5))$ при $a \neq 5$.

Пример 14.

$1 / (x - 1) + 1 / (x - a) = (a + 1) / a$.

Решение. Отмечаем, что $a(x - 1)(x - a) \neq 0$, т.е. $x \neq 1$, $x \neq a$, $a \neq 0$. При этих условиях данное уравнение после упрощений принимает вид

$(a + 1)x^2 - (a^2 + 4a + 1)x + (2a^2 + 2a) = 0$.

Если $a + 1 = 0$, т.е. $a = -1$, имеем, $2x = 0$, т.е. $x = 0$.

Если $a + 1 \neq 0$, т.е. $a \neq -1$, то находим, что

$x_{1,2} = (a^2 + 4a + 1 \pm \sqrt{(a^4 + 2a^2 + 1)}) / (2(a + 1) = (a^2 + 4a + 1 \pm (a^2 + 1)) / (2(a + 1))$

т.е. $x_1 = a + 1$, $x_2 = 2a / (a + 1)$. Найдём значения a, при которых $x = 1$ и $x = a$, чтобы исключить их.

$a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$ — недопустимо по условию;

$a + 1 = a \Rightarrow 1 = 0$ — невозможно;

$2 / (a + 1) = 1 \Rightarrow 2a = a + 1$, т.е. $a = 1$;

$2 / (a + 1) = a \Rightarrow 2a = a^2 + a$, $a = 1$ и $a = 0$ — недопустимо.

Итак, если $a \neq -1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, то $x_1 = a + 1$, $x_2 = 2a / (a + 1)$.

Теперь рассмотрим, что происходит с уравнением при $a = 1$. Найдём корни уравнения: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, причём $x_1 = 1$ не подходит по условию. Теперь выписываем

Ответ: $x_1 = a + 1$ и $x_2 = 2$ при $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$; $x = 0$ при $a = -1$; $x = 2$ при $a = 1$.

Пример 15. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} axy + x - y + 1,5 = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0. \end{cases}$$

Имеет единственное решение?

Решение. Умножим второе уравнение на a и вычтем его из первого уравнения. Получаем равносильную систему

$$\begin{cases} axy + x - y + 1,5 - ax - 2ay - axy - a = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0, \end{cases}$$ т.е.

$$\begin{cases} (1 - a)x - (2a + 1)y + 1,5 - a = 0, \\ x + 2y + xy + 1 \end{cases}$$

a) Если $a = 1$, то $-3y + 0,5 = 0$, т.е. $y = 1/6$. Подставив это значение во второе уравнение, находим единственное значение x. Система имеет единственное решение.

b) Если $a = -0,5$, то система имеет единственное решение.

c) При остальных значениях a сведём систему к квадратному уравнению; из первого уравнения системы находим

$y = ((1 - a)x + 1,5 - a) / (2a + 1)$,

подставляем во второе уравнение:

$x + ((2 - 2a)x + 3 - 2a) / (2a + 1) + ((1 - a)x^2 + 1,5x - ax) / (2a + 1) + 1 = 0$, т.е.

$2ax + 3x - 2ax + 3 - 2a + x^2 - ax^2 + 1,5x - ax + 2a + 1 = 0$,

$(1 - a)x^2 + (4,5 - a)x + 4 = 0$.

Уравнение имеет единственное решение в том случае, когда дискриминант равен нулю:

$(9 / 2 - a)^2 - 4 \cdot 4(1 - a) = 0$, т.е. $a^2 + 7a + 17 / 4 = 0$, т.е. $a = (-7 \pm 4\sqrt{2}) / 2$.

Ответ: $a = 1$, $a = -1 / 2$, $a = (-7 \pm 4\sqrt{2}) / 2$.

Пример 16.

$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$.

Решение. $x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + abx + acx + bcx - abc = 0$,

группируем: $x^2(x - a) - bx(x - a) - cx(x - a) - cx(x - a) + bc(x - a)$,

$(x - a)(x^2 - bc - cx + bc)$.

$(x - a) = 0$,

$x_1 = a$.

$x^2 - bc - cx + bc = 0$,

$x(x - b) - c(x - b) = 0$,

$(x - b)(x - c) = 0$,

$x - b = 0$, $x_2 = b$

$x - c = 0$, $x_3 = c$.

Ответ: $x_1 = a$; $x_2 = b$; $x_3 = c$.

Замечание: корни уравнения можно было легко найти, пользуясь теоремой Виета для кубического уравнения:

если $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, то

$x_1 + x_2 + x_3 = -p$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q$,

$x_1x_2x_3 = -r$.

В нашем случае:

$x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = ab + bc + cd$,

$x_1x_2x_3 = abc$.

Отсюда следует, что $x_1 = a$; $x_2 = b$; $x_3 = c$.

Уравнения, содержащие знак модуля

Пример 1. Решим уравнение.

$|x| = |3 - 2x| - x - 1$.

Решение. Выражение x обращается в нуль при $x = 0$, а выражение $3 - 2x$ — при $x = 3 / 2$. Точки 0 и 3 / 2 разбивают числовую ось на промежутки $(-\infty; 0)$,$[0; 3 / 2]$, $(3 / 2; \infty)$. При $-\infty < x < 0$ имеем $x < 0$ и $3 - 2x > 0$. Поэтому на этом промежутке $|x| = -x$, $|3 - 2x| = 3 - 2x$ и уравнение принимает вид $-x = 3 - 2x - x - 1$. Решая его, получаем, что $x = 1$. Но это значение x не лежит на $(-\infty; 0)$, и потому на этом промежутке уравнение корней не имеет. При $0 \le x \le 3/ 2$ имеем $x \ge 0$, $3 - 2x \ge 0$, поэтому $|x| = x$, $|3 - 2x| = 3 - 2x$. И уравнение принимает вид $x = 3 - 2x - x - 1$. Решая его, находим $x = 0{,}5$. Так как это значение x принадлежит промежутку $[0; 3 / 2]$, то 1 / 2 является корнем заданного уравнения. Наконец, на промежутке $(3 / 2; +\infty)$ имеем $x > 0$, $3 - 2x < 0$, а потому $|x| = x$, $|3 - 2x| = -(3 - 2x)$ и уравнение принимает вид $x = -(3 - 2x) - x - 1$, т.е. $0 = -4$. Значит, на этом промежутке нет корней заданного уравнения.

Мы получили, таким образом, что уравнение имеет лишь один корень, а именно $x = 0{,}5$.

Ответ: $x = 0{,}5$.

В некоторых случаях уравнение со знаком модуля имеет бесконечно много решений.

Пример 2. $|8 - 5x| = |3 + x| + |5 - 6x|$.

Выражения $(8 - 5x)$, $(3 + x)$ и $(5 - 6x)$ обращаются в нуль соответственно в точках 8 /5, –3, 5 / 6. Эти точки разбивают числовую ось на 4 промежутка. При этом, в ходе решения, устанавливаем, что на промежутках $(-\infty; -3)$, $(5 / 6; 8 /5]$, $(8 / 5; +\infty)$ уравнение корней не имеет, а на промежутке $[-3; 5 / 6]$ оно обращается в тождество $8 - 5x = 3 + x + 5 - 6x$. Поэтому ответ имеет вид $[-3; 5 / 6]$.

Ответ: $[-3; 5/ 6]$.

Несколько сложнее решаются уравнения, в которых встречается знак модуля под знаком модуля. Однако и в этом случае метод разбиения оси на промежутки знакопостоянства позволяет решить уравнение.

Пример 3. Решим уравнение $|2x - 3 - |x + 2|| = 8x + 12$.

Решение. Выражение $(x + 2)$ обращается в нуль при $x = -2$. Если $x < -2$, то $(x + 2) < 0$ и потому $|x + 2| = -(x + 2)$. Значит, на промежутке $(-\infty; -2)$ заданное уравнение принимает вид $|2x - 3 + (x + 2)| = 8x + 12$, т.е. $|3x - 1| = 8x + 12$. Но при $x < -2$ имеем $3x - 1 < 0$ и потому $|3x - 1| = -(3x - 1)$. Получаем уравнение $-(3x - 1) = 8x + 12$, имеющее корень $x = -1$. Так как это число не лежит на промежутке $(-\infty; -2)$, то заданное уравнение не имеет на это промежутке корней.

Пусть теперь $x \ge -2$. Тогда $|x + 2| = x + 2$, и мы получаем уравнение $|2x - 3 - (x + 2)| = 8x + 12$, т.е. $|x - 5| = 8x + 12$. Здесь надо рассмотреть два случая: $x < 5$ и $x \ge 5$. В первом случае $|x - 5| = -(x - 5)$, и потому получаем уравнение $-(x - 5) = 8x + 12$. Его корень равен $-7 / 9$. Поскольку $-2 \le (-7 / 9) \le 5$, то $-7 / 9$ является корнем заданного уравнения. Если же $x \ge 5$, то $|x - 5| = x - 5$ и уравнение принимает вид

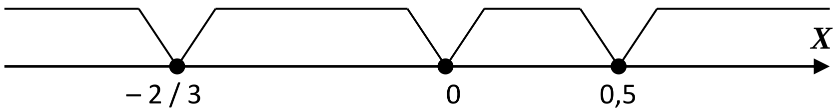
$x - 5 = 8x + 12$. Корнем полученного уравнения является число $-17 / 7$. Поскольку оно не лежит на луче $[5; +\infty)$, оно не является корнем заданного уравнения. Итак, решение имеет вид $x = -7 / 9$.

Ответ: $x = -7 / 9$.

Пример 4.

$|1 - 2x| + |3x + 2| + |x| = 5.$

Решение. Приравниваем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля, отмечаем на числовой оси полученные значения, исследуем уравнения в каждом из полученных интервалов:



А) если $x < -2 / 3$, то $1 - 2x > 0$, $3x + 2 < 0$, $x < 0$ и уравнение переписывается так:

$1 - 2x - 3x - 2 - x = 5$, т.е. $-6x = 6$, $x = -1 \in(-\infty; -2 / 3)$.

Б) если $-2 / 3 \le x < 0$, то $1 - 2x > 0$, $3x + 2 \ge 0$, $x < 0$ и поэтому имеем:

$1 - 2x + 3x + 2 - x = 5$, и т.к. $3 \ne 5$, то в промежутке $[-2 / 3; 0)$ корней нет.

В) если $0 \le x < 0{,}5$, то получаем: $1 - 2x + 3x + 2 + x = 5$, т.е. $2x = 2$; $x = 1 \notin[0; 0{,}5)$.

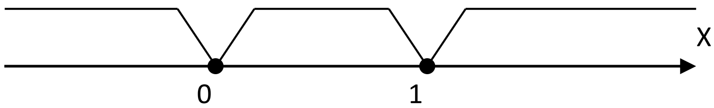
Г) если $0{,}5 \le x$, то $-1 + 2x + 3x + 2 + x = 5$, $6x = 4$, $x = 2 / 3 \in(0{,}5; \infty)$.

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 2 / 3$.

Пример 5.

$| x | + | x - 1 | = 1.$

Решение. $(x - 1) = 0$, $x = 1$; $\Rightarrow$ получаем интервалы:



А) $x \in(-\infty; 0)$, тогда $-x - x + 1 = 1$; $-2x = 0$, $x = 0 \notin(-\infty; 0)$.

Б) $x \in[0; 1)$, тогда $x - x + 1 = 1$; $1 = 1$ $\Rightarrow$ x — любое число из $[0; 1)$.

В) $x \in[1; \infty)$, тогда $x + x - 1 = 1$; $2x = 2$; $x = 1 \in[1; \infty)$.

Ответ: $x \in[0; 1]$.

Рациональные неравенства

Метод интервалов

Пример 1: Решить неравенство

$$x^4 + 3x^3 - 4x > 0. \qquad (*)$$

Решение. Разложим на множители многочлен $P_4(x)$, стоящий в левой части неравенства (*). Вынося множитель x за скобку, получаем

$P_4(x) = x(x^3 + 3x^2 - 4)$.

Второй сомножитель, представляющий собой кубический многочлен, имеет корень $x = 1$. Следовательно, он может быть представлен в виде

$x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)(x + 2)^2$.

Таким образом, $P_4(x) = x(x - 1)(x + 2)^2$ и неравенство (*) может быть записано в виде

$$x(x - 1)(x + 2)^2 > 0. \qquad (**)$$

Решим неравенство (**) методом интервалов. При $x > 1$ все сомножители, стоящие в левой части неравенства, положительны.

Будем двигаться по оси O_x справа налево. При переходе через точку $x = 1$ многочлен $P_4(x)$ меняет знак и принимает отрицательные значения, так как $x = 1$ — простой корень (корень кратности 1); при переходе через точку $x = 0$ многочлен также меняет знак и принимает положительные значения, так как $x = 0$ — также простой корень; при переходе через точку $x = -2$ многочлен знака не меняет, так как $x = -2$ — корень кратности 2. Промежутки знакопостоянства многочлена $P_4(x)$ схематически представлены на рис 1. Используя этот рисунок, легко выписать множество решений исходного неравенства.

Ответ. $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (1; \infty)$.

Пример 2: Решить неравенство

$(x^2 – 3x – 2)(x^2 – 3x + 1) < 10.$

Решение: Пусть $x^2 – 3x – 2 = y$. Тогда неравенство примет вид $y(y +3) < 10$, или $y^2 + 3y – 10 < 0$, откуда $(y + 5)(y – 2) < 0$. Решением этого неравенства служит интервал $–5<y<2$. Таким образом, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 – 3x – 2 < 2, \\ x^2 – 3x – 2 > -5, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 – 3x – 4 < 0, \\ x^2 – 3x + 3 > 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} (x – 4)(x + 1) < 0, \\ (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0. \end{cases}$$

Поскольку второе неравенство выполняется при всех x, решение этой системы есть интервал (-1; 4).

Ответ: (-1; 4).

Пример 3: Решить неравенство

$x^4 – 34x^2 + 225 < 0.$

Решение. Сначала решим биквадратное уравнение $x^4 – 34x^2 + 225 < 0$. Полагая $x^2 = z$, получаем квадратное уравнение $z^2 – 34z + 225 = 0$, из которого находим: $z_1 = 9$ и $z_2 = 25$. Решая уравнения $x^2 = 9$ и $x^2 = 25$, получаем 4 корня биквадратного уравнения: -3, 3, -5, 5. Значит, $x^4 – 34x^2 + 225 = (x + 5)(x + 3)(x – 3)(x – 5)$, и поэтому заданное неравенство иммет вид:

$(x + 5)(x + 3)(x – 3)(x – 5) < 0.$

Изображаем на координатной прямой точки –5, -3, 3, 5 и проводим кривую знаков. Решение неравенства является объединение интервалов (-5; -3) и (3; 5).

Ответ: $(-5; -3)\cup(3; 5)$.

Пример 4: Решить неравенство

$x^4 – 3 < 2x(2x^2 – x – 2).$

Решение. Дано целое рациональное неравенство. Перенесем все слагаемые в левую часть и приведем многочлен к стандартному виду. Получим равносильное неравенство

$x^4 – 4x^3 + 2x^2 + 4x – 3 < 0.$

Решая уравнение $x^4 – 4x^3 + 2x^2 + 4x – 3 = 0$, находим корни $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1$, $x_4 = 3$. Тогда неравенство можно переписать в виде

$(x – 1)^2(x + 1)(x – 3) < 0.$

Найденные корни разбивают числовую ось на четыре промежутка, на каждом из которых левая часть неравенства, а значит, и исходного неравенства сохраняет знак. Выбирая пробные точки в каждом из промежутков (достаточно значения x подставлять только в последний два сомножителя), получаем знаки, указанные на рисунке. Видим, что неравенство выполняется на промежутках (-1; 1) и (1; 3).

Так как неравенство строгое, то числа –1, 1, 3 не входят в решение неравенства.

Ответ: $(-1;\ 1)\cup(1;\ 3)$.

Дробно-рациональные неравенства

Пример 1: Решить неравенство

$$\frac{x+2}{x^2-x-2} < -1.$$

Решение: Прибавляя к обеим частям неравенства 1, получим неравенство вида (5).

$\frac{x^2}{x^2-x-2} < 0$, которое эквивалентно неравенству $x^2(x^2-x-2) < 0$.

Множество решений последнего неравенства находится методом интервалов:

$x\in(-1;0)\cup(0;2)$.

Ответ: $x\in(-1;0)\cup(0;2)$.

Пример 2: Решить неравенство

$$\frac{x^2+4x-1}{x^2+4x+3} \le \frac{1}{x+1}.$$

Решение: Перенеся все члены неравенства в левую часть, получим

$\frac{x^2+4x-1}{(x+1)(x+3)} - \frac{1}{x+1} \le 0$, или $\frac{x^2+3x-4}{(x+1)(x+3)} \le 0$, откуда $\frac{(x-1)(x+4)}{(x+1)(x+3)} \le 0$.

Пользуясь методом интервалов и учитывая знак неравенства, заключаем, что решением неравенства является объединение полуинтервалов: $[-4;\ -3)\cup(-1;\ 1]$.

Ответ: $[-4;\ -3)\cup(-1;\ 1]$.

Пример 3: Решить неравенство:

$$\frac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-6)^4} \le 0.$$

Решение: Полагая $x \ne 0$ и $x \ne 3$, разделим обе части неравенства на положительную дробь и получим и сразу заметим, что $x = 0$ удовлетворяет заданному неравенству, а $x = 3$ не удовлетворяет. Кроме того, множители с нечетными показателями степени заменим соответствующими множителями первой степени (ясно, что при этом знак выражения в левой части неравенства не изменится). В результате получим более простое неравенство, равносильное заданному для всех $x\ne0$ и $x\ne3$:

$$\frac{(2x-9)(x-1)}{(x+4)} \le 0.$$

Начертив кривую знаков, заштрихуем промежутки удовлетворяющие этому неравенству, и отметим на той же оси точки $x = 0$ и $x = 3$. Учитывая, что значение $x = 0$ является решением заданного неравенства, но не принадлежит заштрихованному промежутку, его следует дополнительно включать в ответ. Значение $x = 3$ не является решением неравенства, но принадлежит заштрихованному промежутку; следовательно, это значение нужно исключить. Итак, получаем ответ: $(-\infty;\ -4)\cup[1;\ 3)\cup(3;\ 4{,}5]\cup\{0\}$.

Ответ: $(-\infty;\ -4)\cup[1;\ 3)\cup(3;\ 4{,}5]\cup\{0\}$.

Пример 4: Решить неравенство

$$\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30} < 0.$$

Решение. Разлагая числитель и знаменатель на множители, переписываем данное неравенство в виде

$$\frac{x^2(x-1)(x-2)}{(x-6)(x+5)} < 0.$$

Точками, в которых множители меняют знаки, являются –5, 1, 2, 6. Они разбивают числовую ось не интервалы (-∞; -5), (-5; 1), (1; 2), (2; 6),(6; +∞).

С помощью кривой знаков находим интервалы, где выполняется неравенство: (-5; 1) и (2; 6). При этом из (-5; 1) надо удалить точку 0, так как в этой точке выражение обращается в нуль. Итак, получаем ответ в виде (-5; 0)∪(0; 1)∪(2; 6).

Ответ: (-5; 0)∪(0; 1)∪(2; 6).

Пример 5: Решить неравенство

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x2}{x3 - 5x^2} < 0.$$

Решение. Разлагая числитель и знаменатель на множители, перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{x^2(x-1)(x-2)}{x^2(x-5)} < 0.$$

Нанесем числа 0, 1, 2, 5, при которых числитель и знаменатель обращаются в нуль, на числовую ось. Они разбивают числовую ось на пять промежутков.

С помощью "пробных" точек найдем знак выражения в каждом промежутке.

Выпишем интервалы, где выполняется неравенство: (-∞; 0), (0; 1), (2; 5).

Ответ: (-∞; 0)∪(0; 1)∪(2; 5).

Неравенства, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины.

Пример 1: Решить неравенство

$$|x^2 - 2| + x < 0. \qquad (*)$$

Решение: Рассмотрим промежутки знакопостоянства выражения $x^2 - 2$, стоящего под знаком абсолютной величены.

1) Предположим, что $x^2 - 2 \geq 0$, тогда неравенство (*) принимает вид $x^2 + x - 2 < 0$.

Пересечение множества решений этого неравенства и неравенства $x^2 - 2 \geq 0$ представляет собой первое множество решений исходного неравенства: $x \in (-2; -\sqrt{,2}\,]$.

2) Предположим, что $x^2 - 2 < 0$, тогда согласно определению абсолютной величены имеем $|x^2 - 2| = 2 - x^2$, и неравенство (*) приобретает вид $2 - x^2 + x < 0$.

Пересечение множества решений этого неравенства и неравенства $x^2 - 2 < 0$ дает второе множество решений исходного неравенства: $x \in (-\sqrt{,2}\,; -1)$.

Объединяя найденные множества решений, окончательно получаем $x \in (-2; -1)$

Ответ: $x \in (-2; -1)$.

Пример 2: Решить неравенство

$$\left|\frac{x-1}{x+2}\right| > 1. \qquad (*)$$

Решение: Исходное неравенство при всех $x \neq -2$ эквивалентно неравенству

$$|x - 1| > |x + 2|. \qquad (**)$$

Возведя обе части неравенства (**) в квадрат, после приведения подобных членов получаем неравенство

$6x < -3$,

т.е. $x < -1/2$.

Учитывая множество допустимых значений исходного неравенства, определяемого условием $x \neq -2$, окончательно получаем, что неравенство (*) выполняется при всех $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1/2)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1/2)$.

Пример 3: Найти наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

$$\frac{2x + 5}{|x + 1|} > 1.$$

Решение: Так как $|x + 1| \geq 0$ и, по условию, $|x + 1| \neq 0$, то данное неравенство равносильно следующему: $2x + 5 > |x + 1|$. Последнее в свою очередь, эквивалентно системе неравенств $-(2x + 5) < x + 1 < 2x + 5$,

$$\begin{cases} -(2x + 5) < x + 1 \\ 2x + 5 > x + 1, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} x > -4, \\ x > -4/3. \end{cases}$

Наименьшим целым числом x удовлетворяющей этой системе будет неравенств, является 0. Заметим, что $x \neq -1$, иначе выражение в левой части данного неравенства не имеет смысла.

Ответ: 0.

Пример 4: Решить неравенство:

$$\frac{-2}{|x| + 1} \geq |x| - 2 .$$

Решение: Пусть $|x| = y$. Заметим далее, что $|x| + 1 > 0$. Поэтому данное неравенство эквивалентно следующему: $-2 \geq (y - 2)(y + 1)$, или $y^2 - y \leq 0$, или $0 \leq y \leq 1$, или $0 \leq |x| \leq 1$. Отсюда $-1 \leq x \leq 1$.

Ответ: [-1; 1].

Пример 5: Решить неравенство

$$|x^2 - 3x + 2| + |2x + 1| \leq 5.$$

Решение. $x^2 - 3x + 2$ отрицателен при $1 < x < 2$ и неотрицателен при остальных x, $2x + 1$ меняет знак при $x = -½$. Следовательно, нам надо рассмотреть четыре случая.

1. $x < -½$. В этом случае $x^2 - 3x + 2 > 0$, $2x + 1 < 0$.

Получаем неравенство $x^2 - 3x + 2 - 2x - 1 \leq 5$, $x^2 - 5x - 4 \leq 0$.

С учетом условия $x < -½$ находим $\frac{5 - \sqrt{41}}{2} \leq x \leq -½$.

2. $-½ \leq x \leq 1$. Имеем неравенство $x^2 - x - 2 \leq 0$. Его решение $-1 \leq x \leq 2$. Следовательно, весь отрезок $-½ \leq x \leq 1$удовлетворяет неравенству .

3. $1 < x < 2$. Получаем $x^2 - 5x + 6 \geq 0$; $x \leq 2$ или $x \geq 3$. Вновь подходит весь интервал.

4. $x \geq 2$. Неравенство то же, что и в случае 2. Подходит лишь $x = 2$.

Ответ: $\frac{5 - \sqrt{41}}{2} \leq x \leq 2$.

Пример 6: Решить неравенство

$$\big||x^3 + x - 3| - 5\big| \leq x^3 - x + 8.$$

Решение. Решим это неравенство не стандартным образом.

$$\begin{cases} |x^3 + x - 3| - 5 \leq x^3 - x + 8, \\ |x^3 + x - 3| - 5 \leq -x^3 + x - 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |x^3 + x - 3| \leq x^3 - x + 13 \\ |x^3 + x - 3| \geq -x^3 + x - 3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \left[\begin{array}{l} x^3 + x - 3 \leq x^3 - x + 13 \\ x^3 + x - 3 \geq -x^3 + x - 13, \end{array} \right. \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{cases} x \leq 8, \\ x^3 \geq -5, \end{cases} \right. \Longleftrightarrow$$

$x^3 + x - 3 \geq -x^3 + x - 3,$ $\qquad$ $\left[\begin{array}{l} x^3 \geq 0, \\ x \leq 3 \end{array}\right.$

$x^3 + x - 3 \leq x^3 - x + 3$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3,5} \leq x \leq 8, \\ x \text{ – любое} \end{cases} \Longleftrightarrow \quad -\sqrt{3,5} \leq x \leq 8.$

Ответ: $-\sqrt{3,5} \leq x \leq 8$.

Неравенства с параметрами

Пример 1: Решить неравенство:

$$\frac{m^2x + 1}{2} - \frac{m^2x + 3}{3} < \frac{m + 9x}{6}.$$

Решение: Преобразуем данное неравенство: $3m^2x + 3 - 2mx^2 - 6 < m + 9x$; $mx^2 - 9x < m + 3$; $(m - 3)(m + 3)x < m + 3$. Далее находим решение неравенства при различных значения параметра m:

1) Пусть $(m - 3)(m + 3) > 0$, т.е. $m < -3$ или $m > 3$. Тогда неравенство имеет решение $x < 1/(m - 3)$.
2) Пусть $(m - 3)(m + 3) < 0$, т.е. $-3 < m < 3$. Тогда неравенство имеет решение $x > 1/(m - 3)$.
3) Пусть $(m - 3)(m + 3) = 0$, т.е. $m = 3$ или $m = -3$. Тогда если $m = 3$, то неравенство примет вид $0 \cdot x < 6$ и, значит выполняется при любом $x \in R$. Если же $m = -3$, то неравенство примет вид $0 \cdot x < 0$ и, следовательно, не имеет решении.

Пример 2: Для каждого неотрицательного значения параметра a решить неравенство

$4a^3x^4 + 4a^2x^2 + 32x + a + 8 \geq 0.$

Решение. Левая часть неравенства представляет собой многочлен как относительно x, так и относительно параметра a. Степени соответственно равны 4 и 3. Однако если умножить многочлен на a, а затем сделать замену $y = ax$, то в новом многочлене максимальная степень параметра a будет равна 2. Случай $a = 0$ дает нам ответ $x \geq -¼$. Будем теперь считать, что $a > 0$. Умножив обе части неравенства на a и сделав замену $y = ax$, получим

$4y^4 + 4ay^2 + 32y + a^2 + 8a \geq 0.$

Левая часть представляет собой квадратный трехчлен относительно a:

$a^2 + (4y^2 + 8)a + 4y^2 + 32y \geq 0,$

$¼D = (2y^2 + 4)^2 - 4y^2 - 32y = 16(y - 1)^2.$

Раскладывая левую часть неравенства на множители, получим

$(a + 2y^2 + 4y)(a + 2y^2 - 4y + 8) \geq 0,$

или

$(2y^2 + 4y + a)(2y^2 - 4y + 8 + a) \geq 0.$

Второй множитель положителен при всех y, если $a > 0$. Приходим к неравенству $2y^2 + 4y + a \geq 0$, откуда, если $0 < a < 2$, $y \leq ½(-2 -\sqrt{,4 - 2a})$ или $y \geq ½(-2+\sqrt{,4 - 2a})$; если $a \geq 2$, y – любое. Возвращаясь к x, получим ответ.

Ответ: Если $a = 0$, то $x \geq -¼$; если $0 < a < 2$, то $x \leq 1/2a*(-2 - \sqrt{,4 - 2a})$ или $x \geq 1/2a(-2 + \sqrt{,4 - 2a})$; если $a \geq 2$, то x – любое.

Пример 3: Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0, \\ ax^2 - 2(a + 1)x + a - 1 \geq 0. \end{cases}$$

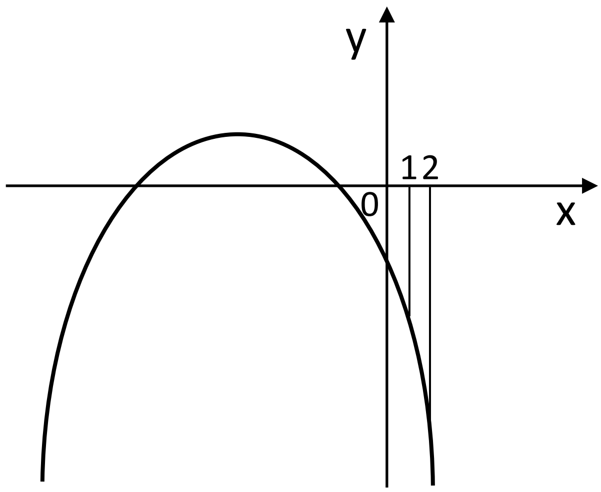
Решение: Поскольку решением первого неравенства является $1 \le x \le 2$, то задача сводится (при $a \ne 0$) к выяснению расположения корней квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 - 2(a + 1)x + a - 1$ относительно отрезка [1; 2]. Имеем

$\frac{1}{4}D = (a + 1)^2 - a(a - 1) = 3a + 1$, $f(1) = -3$, $f(2) = a - 5$.

Область изменения параметра а оказалось разделенной на 4 части (не считая граничных точек).

1) Если $a < -1/3$, второе неравенство, а следовательно и данная система не имеют решения. То же имеет место и при $a = -1/3$.

2) Если $-1/3 < a < 0$, то $f(1) < 0$, $f(2) < 0$. Для вершины параболы выполняется неравенство $x_в = \frac{a+1}{a} < 0$ (рис. 1,а). Следовательно, множество решении второго неравенства не содержит точек отрезка [1; 2]. Система не имеет решения. То же имеет место и при $a = 0$.



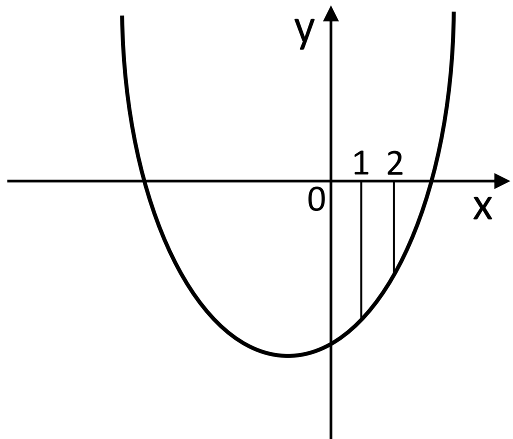


Рис. 1, б

3) Если $0 < a < 5$, то $f(1) < 0$, $f(2) < 0$ (рис. 1, б). Значит, на всем отрезке [1; 2] $f(x) < 0$. Система вновь не имеет решения.

4) Если $a \ge 5$, то $f(1) < 0$, $f(2) \ge 0$ (рис. 1, в). Решением системы будет $x_2 \le x \le 2$ где x_2 – больший корень уравнения $f(x) = 0$.

Ответ: Если $a < 5$, система не имеет решения; если $a \ge 5$, то $1/a(a + 1 + \sqrt{3a + 1}) \le x \le 2$.

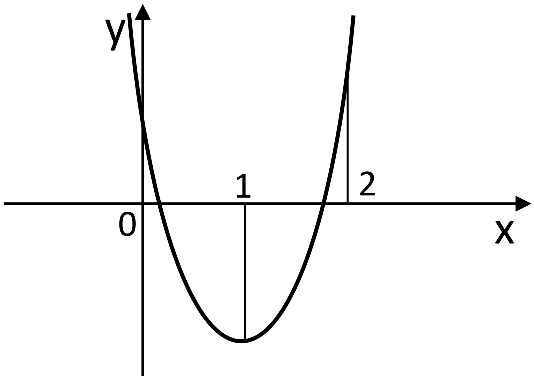


Рис. 1, в

Пример 4: Решить неравенство

$|2x^2 + x - a - 8| \le x^2 + 2x - 2a - 4.$

Решить: Напомним, что неравенство $|a| \le b$ эквивалентно двойному неравенству $-b \le a \le b$. В нашем случае после преобразования приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} a \le -x^2 + x + 4, \\ a \le x^2 + x - 4. \end{cases}$$

Изобразим на плоскости (x; a) множество точек, координаты которых удовлетворяют полученной системе. При конкретном значении параметра $a = \alpha$ решением нашего неравенства будут абциссы тех точек горизонтальной прямой $a = \alpha$, которые находятся в заштрихованной области. Найдем точки пересечения A(2; 2), B(-2; -2) наших точек парабол и вершину C(-0,5; -4,25) параболы $a = x^2 + x - 4$.

Далее получаем: если $a > 2$, то соответствующая прямая пересекается с заштрихованной областью.

Если $-2 < a \le 2$, то соответствующая прямая пересекается с заштрихованной областью по отрезку. Концами этого отрезка будут точки с абциссами $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17 + 4a})$ (больший корень уравнения $a = x^2 + x - 4$ или $x^2 - x - 4 + a = 0$).

Если $-4\frac{1}{4} \le a \le -2$, то горизонтальная прямая, соответствующая таким а, пересекается с заштрихованной областью по двум отрезкам. Решением неравенства будет

$$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{17 - 4a}) \le x \le -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{17 + 4a}),$$
$$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17 - 4a}) \le x \le -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{17 + 4a}).$$

Если $a < -4\frac{1}{4}$, то $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{17 - 4a}) \le x \le \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17 - 4a})$.

Системы рациональных неравенств

Пусть надо найти числовые значения х, при которых превращаются в верные числовые неравенства одновременно несколько рациональных неравенств. В таких случаях говорят, что надо решить систему рациональных неравенств с одним неизвестным х.

Чтобы решить систему рациональных неравенств, надо найти все решения каждого неравенства системы. Тогда общая часть всех найденных решений и будет решением системы.

Пример 1: Решить систему неравенств

$$\begin{cases} (x-1)(x-5)(x-7) < 0, \\ \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-4} > 0. \end{cases}$$

Сначала решаем неравенство

$(x - 1)(x - 5)(x - 7) < 0$.

Применяя метод интервала, находим, что множество всех решении неравенства (2) состоит из двух интервалов: $(-\infty, 1)$ и $(5, 7)$.

Теперь решим неравенство

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-4} > 0.$$

Применяя метод интервалов, находим, что множество всех решении неравенства (3) также состоит их двух интервалов: $(2, 3)$ и $(4, +\infty)$.

Теперь надо найти общую часть решении неравенств (2) и (3). Нарисуем координатную ось х и отметим на ней найденные решения. Теперь ясно, что общей частью решении неравенств (2) и (3) является интервал $(5, 7)$.

Следовательно, множество всех решении системы неравенств (1) составляет интервал $(5, 7)$.

Пример 2: Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 10 < 0, \\ \dfrac{x^9 - x^3 + x + 2}{x^4 - x^2 + 1} > 0. \end{cases}$$

Решим сначала неравенство

$x^2 - 6x + 10 < 0$.

Применяя метод выделения полного квадрата, можно написать, что

$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 10 = (x - 3)^2 + 1$.

Поэтому неравенство (2) можно записать в виде

$(x - 3)^2 + 1 < 0$,

откуда видно, что оно не имеет решении.

Теперь можно не решать неравенство

$$\frac{x^9 - x^3 + x + 2}{x^4 - x^2 + 1} > 0,$$

так как ответ уже ясен: система (1) не имеет решении.

Пример 3: Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 4}{x} < 1, \\ x^2 < 64. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала первое неравенство; имеем

$$\frac{x^2 + x - 4}{x} - 1 < 0, \ \frac{(x - 2)(x + 2)}{x} < 0.$$

С помощью кривой знаков находим решения этого неравенства: $x < -2$; $0 < x < 2$.

Решим теперь второе неравенство заданной системы. Имеем $x^2 - 64 < 0$, или $(x - 8)(x + 8) < 0$. С помощью кривой знаков находим решения неравенства: $-8 < x < 8$.

Отметив найденные решения первого и второго неравенства на общей числовой прямой (рис. 6), найдем такие промежутки, где эти решения совпадают (пресечение решении): $-8 < x < -2$; $0 < x < 2$. Это и есть решение системы.

Пример 4: Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 \geq 100x^3; \\ \dfrac{(x + 9)(5x - x^2 - 18)}{x^2 - 18x + 45} \geq 0. \end{cases}$$

Преобразуем первое неравенство системы:

$x^3(x - 10)(x + 10) \geq 0$, или $x(x - 10)(x + 10) \geq 0$

(т.к. множители в нечетных степенях можно заменять соответствующими множителями первой степени); с помощью метода интервалов найдем решения последнего неравенства: $-10 \leq x \leq 0$, $x \geq 10$.

Рассмотрим второе неравенство системы; имеем

$$\frac{(x + 9)(x^2 - 5x + 18)}{(x - 3)(x - 15)} \leq 0.$$

Находим $x \leq -9$; $3 < x < 15$.

Объединив найденные решения, получим $x \leq 0$; $x > 3$.

Пример 5: Найти целочисленные решения системы неравенств:

$$\begin{cases} x + y < 2{,}5, \\ x - y > -3, \\ y - 1 > 0. \end{cases}$$

Решение: Приведем систему к виду

$$\begin{cases} x + y < 2{,}5, \\ y - x < 3, \\ y > 1. \end{cases}$$

Складывая первое и второе неравенства, имеем $y < 2,\ 75$, а учитывая третье неравенство, найдем $1 < y < 2{,}75$. В этом интервале содержится только одно целое число 2. При $y = 2$ из данной системы неравенств получим

$$\begin{cases} x < 0{,}5, \end{cases}$$

x > -1,
откуда –1 < x < 0,5. В этом интервале содержится только одно целое число 0.
Ответ: x = 0, y =2.

6. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля знаний, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля знаний, промежуточной аттестации приведен в приложении

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1. Гусев, В. А. Геометрия: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Гусев, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — 280 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08897-7. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/494638
2. Литвиненко, В.Н., Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – Москва: Просвещение, 1995. - 352 с. – ISBN 5-87484-023-0; То же [Электронный ресурс]. - URL: https://uch-lit.ru/matematika-2/dlya-studentov/litvinenko-v-n-mordkovich-a-g-praktiku

Перечень дополнительной литературы

1. Далингер, В. А. Математика: логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 176 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-05316-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/492730
2. Далингер, В. А. Математика: тригонометрические уравнения и неравенства: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — 136 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08453-5. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/492901
3. Далингер, В. А. Математика: задачи с модулем: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 364 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04793-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://www.urait.ru/bcode/492899

8.Перечень современных профессиональных баз данных, информационных справочных систем

Все обучающиеся университета обеспечены доступом к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам. Ежегодное обновление современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем отражено в листе актуализации рабочей программы.

Современные профессиональные базы данных:

1. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования: http://fgosvo.ru
2. Федеральный портал "Российское образование": www.edu.ru
3. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам": window.edu.ru
4. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов: fcior.edu.ru
5. Единая коллекция информационно-образовательных ресурсов: school-collection.edu.ru
6. Лекторий Минобрнауки/Минпросвещения России: https://vk.com/videos-30558759?section=album_3
7. ЭБС "Университетская библиотека онлайн": http://biblioclub.ru
8. ЭБС «Лань»: https://e.lanbook.com

Информационные справочные системы:

1. Поисковая система Яндекс https://yandex.ru/
2. Поисковая система Рамблер https://www.rambler.ru/
3. Поисковая система Google https://www.google.ru/
4. Поисковая система Mail.ru https://mail.ru/

9. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине имеется в наличии следующая материально-техническая база:

Аудитории	Программное обеспечение
- учебная аудитория для проведения учебных занятий по дисциплине, оснащенная компьютером с выходом в интернет, мультимедиа проектором; - помещение для самостоятельной работы обучающихся, оснащенное компьютерной техникой с возможностью подключения к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ГГТУ; - специализированная аудитория для проведения лабораторных работ по дисциплине, оснащенная набором реактивов и лабораторного оборудования;	Операционная система Пакет офисных приложений Браузер Firefox, Яндекс

10. Обучение инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья.

При необходимости рабочая программа дисциплины может быть адаптирована для обеспечения образовательного процесса инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья. Для этого требуется заявление студента (его законного представителя) и заключение психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК).

Автор (составитель): ст.пр. Солдатова Н.Г.

Программа одобрена на заседании кафедры математики и экономики
от 20. 05.2022г, протокол № 8

Зав. кафедрой Каменских Н.А.

Приложение

Министерство образования Московской области
Государственное образовательное учреждение
высшего образования Московской области
«Государственный гуманитарно-технологический университет»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Б1.О.07.03
Элементарная математика с практикумом по решению задач

Направление подготовки	**44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**
Направленность (профили) программы	**Математика, Информатика**
Квалификация выпускника	**Бакалавр**
Форма обучения	**Очная**

Орехово-Зуево
2022 г.

1. Индикаторы достижения компетенций

Код и наименование компетенции	Наименование индикатора достижения компетенции
ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	**ОПК-8.1** Применяет методы анализа педагогической ситуации, профессиональной рефлексии на основе специальных научных знаний, в том числе в предметной области. **ОПК-8.2** Проектирует и осуществляет учебно-воспитательный процесс с опорой на знания предметной области, психолого-педагогические знания и научно-обоснованные закономерности организации образовательного процесса.
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	**ПК-1.1** Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). **ПК-1.2** Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО. **ПК-1.3** Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные.

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Оценка уровня освоения компетенций на разных этапах их формирования проводится на основе дифференцированного контроля каждого показателя компетенции в рамках оценочных средств, приведенных в ФОС.

Оценка «отлично», «хорошо», «зачтено» соответствует **повышенному** уровню освоения компетенции согласно критериям оценивания, приведенных в таблице к соответствующему оценочному средству.

Оценка «удовлетворительно», «зачтено» соответствует **базовому** уровню освоения компетенции согласно критериям оценивания, приведенных в таблице к соответствующему оценочному средству.

Оценка «неудовлетворительно», «не зачтено» соответствует показателю «**компетенция не освоена**».

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде	Критерии оценивания
1	2	3	4	5
Оценочные средства для проведения текущего контроля				
1)	**Тест**	Система стандартизированных заданий, позволяющая	Тестовые задания	Оценка «*Отлично*»: в тесте выполнено более 90% заданий.

	(показатель компетенции «Знание»)	измерить уровень **знаний**.		Оценка «*Хорошо*»: в тесте выполнено более 75 % заданий. Оценка «*Удовлетворительно*»: в тесте выполнено более 60 % заданий. Оценка «*Неудовлетворительно*»: в тесте выполнено менее 60 % заданий.
2)	**Презентация** (показатель компетенции «Умение»)	Работа, направленная на выполнение комплекса учебных и исследовательских задач.	Тематика презентаций	Оценка «*Отлично*»: показано **умение** критического анализа информации. Содержание презентации полностью соответствует заявленной теме, рассмотрены дискуссионные вопросы по проблеме, слайды расположены логично, последовательно, завершается презентация четкими выводами. Присутствуют иллюстративно-аналитические материалы (таблицы, диаграммы, схемы и т. д.). Оценка «*Хорошо*»: показано умение критического анализа информации. Содержание презентации полностью соответствует заявленной теме, но тема раскрыта недостаточно полно, при оформлении презентации имеются недочеты. Присутствуют иллюстративно-аналитические материалы (таблицы, диаграммы, схемы и т. д.). Оценка «*Удовлетворительно*»: не показано умение критического анализа информации. Содержание презентации не в полной мере соответствует заявленной теме, тема раскрыта недостаточно полно, нарушена логичность и последовательность в расположении слайдов. Иллюстративно-аналитические материалы не представлены. Оценка «*Неудовлетворительно*»: презентация не соответствует заявленной теме, материал изложен непоследовательно, язык презентации не отражает научного стиля.
3)	**Расчетная работа**	Средство проверки **владения** навыками	Задачи	Оценка «*Отлично*»: продемонстрировано понимание

	(решение задач) (показатель компетенции «Владение»)	применения полученных знаний по заранее определенной методике для решения задач.		методики решения задачи и ее применение. Решение качественно оформлено (аккуратность, логичность). Использован нетрадиционный подход к решению задачи. Оценка «*Хорошо*»: продемонстрировано понимание методики решение и ее применение. Решение задачи оформлено. Оценка «*Удовлетворительно*»: продемонстрировано понимание методики решения и частичное ее применение. Оценка «*Неудовлетворительно*»: задача не решена.
Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации				
4)	**Зачет**	Контрольное мероприятие, которое проводится по окончании изучения дисциплины.	Вопросы к зачету	«*Зачтено*»: **знание** теории вопроса, понятийно-терминологического аппарата дисциплины (состав и содержание понятий, их связей между собой, их систему); **умение** анализировать проблему, содержательно и стилистически грамотно излагать суть вопроса; **владение** аналитическим способом изложения вопроса, навыками аргументации. «*Не зачтено*»: **знание** вопроса на уровне основных понятий; **умение** выделить главное, сформулировать выводы не продемонстрировано; **владение** навыками аргументации не продемонстрировано.

3. Типовые контрольные задания и/или иные материалы для проведения текущего контроля знаний, промежуточной аттестации, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и/или опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы.

Задания для проведения текущего контроля знаний

Тестовые задания

1) Решить уравнение: $\frac{x - 1}{x - 1} = 1.$

А) 0,
Б) 1,
В) Нет решений,
Г) $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2) Решить уравнение: $\dfrac{x^2 + 6x + 5}{x + 1} = 0$.

А) Нет решений,
Б) -1,
В) -5,
Г) $-1; -5$.

3) Решить уравнение: $\dfrac{2x - 3}{x - 3} + \dfrac{5 - x}{x - 3} - \dfrac{x + 2}{x - 3} = 0$.

А) $-2; \dfrac{3}{2}; 5$,
Б) Нет решений,
В) $x \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$,
Г) $x \in R$.

4) Решить уравнение: $ax = 1$.
А) Если $a \neq 0$, то $x \in R$; если $a = 0$, то нет решений,
Б) Если $a = 0$, то нет решений; если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{1}{a}$,
В) Если $a = 0$, то $x \in R$; если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{1}{a}$.
Г) Нет решений.

5) При каких a уравнение $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ имеет более одного корня?
А) $-4 < a < 0$,
Б) $0 < a < 1$,
В) $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$,
Г) $-4 < a < 0$; $0 < a < 1$.

6) При каких a уравнение $(a - 2)x^2 + (4 - 2a)x + 3 = 0$ имеет единственное решение?
А) 2,
Б) $a \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$,
В) 5,
Г) -4.

7) Решить уравнение: $|x^2 - 1| + |a(x - 1)| = 0$.
А) Если $a \neq 0$, то $x = 1$; если $a = 0$, то $x = \pm 1$,
Б) Если $a \neq 0$, то нет решений; если $a = 0$, то $x = 1$.
В) $x = \pm 1$,
Г) Нет решений.

8) Решить систему:

$$\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x},$$
$y^2 - x - 5 = 0.$

А) (4; 3), (4; – 3),
Б) (1; 2),
В) Нет решений,
Г) $x \in R$, $y = \pm 3$.

9) Решить систему:
$$\begin{cases} x^2 + y2 - 2x = 0, \\ x^2 - 2xy + 1 = 0. \end{cases}$$

А) (1; –1), (5; 5)
Б) Нет решений,
В) (1;1),
Г) (–2; 3), (3; –2).

10) При каких a неравенство $2x + a > 0$ является следствием неравенства $x + 1 - 3a > 0$?

А) $\frac{2}{7}$,
Б) $a \geq \frac{2}{7}$,
В) при любых a,
Г) $a \leq \frac{2}{7}$.

11) Найти наибольшее целое x, удовлетворяющие неравенству:
$$\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1.$$
а) $x \in (-\infty; -3{,}5)$,
б) –3,
в) –4,
г) нет решений.

12) Найти наибольшее целое x, удовлетворяющие неравенству:
$$\frac{5x-1}{4} - \frac{8x-3}{5} > -\frac{3}{2}.$$
а)5,
б) –3,
в) 4,
г)нет решений.

13) Найти целочисленные решения неравенств:
$$\frac{7x-15}{3x+3} < 0.$$
а) 0, 1, 2,
б) 4, 5,
в) 7,

г)нет решений.

14) Найти целочисленные решения неравенств:

$$\begin{cases} 17 - 4x < 0, \\ 10x - 67 < 0. \end{cases}$$

а)5,
б) –3, -4, -5,
в) 5,6,
г)нет решений.

15) Решить неравенство:
$\frac{x}{9} - \frac{1}{x} < 0.$

а) $(-\infty; -3)\cup(0; 3,$
б) $(-3, 0)\cup(0; \infty)$,
в) (5; 7),
г) нет решений.

16) Решить неравенство:

$\frac{4}{x-5} < -\frac{5}{x}.$

а) $(-\infty; -3/25)\cup(0; \infty)$,
б) $(-12, 0)\cup(7;9)$,
в) $(-\infty;)\cup(\frac{25}{9}; 5)$,
г) нет решений.

17) Решить неравенство:
$\frac{19x + 53}{x^2 - 4x + 3} < -1.$

а) $(-9; -5)\cup(0; 8)$,
б) $(-8, -7)\cup(1;3)$,
в) $(-\infty; -7)\cup(1; 3)$,
г) нет решений.

18) Решить неравенство:
$\frac{2x^2 - 7x + 41}{x^2 + 7x + 12} \le \frac{x + 2}{x + 4}.$

а) $[-4; -2)\cup(0;5]$,
б) $(-1, 0]\cup[1;7)$,
в) $(-4; -3)\cup[5; 7]$,
г) нет решений.

19) Решить неравенство
$|1{,}5 - 3x| < 3.$

а) $(-2{,}5; -2)\cup(0; 3{,}5]$,
б) (–0,5; 1,5),
в) (-4,5; -3,5),

г) нет решений.

20) Решить неравенство:

$$\frac{6}{|x+2|+5} > |x+2|.$$

а) (-3; -1),
б) (0; 1),
в) (-7; -10),
г) нет решений.

Ответы: 1 – Г; 2 – В; 3 – В; 4 – Б; 5 – Г; 6 – В; 7 – А; 8 – А; 9 – В;10 – Б; 11 – В; 12 – А; 13 – А; 14 – В; 15 – А; 16 – В; 17 – Б; 18 – В; 19 – Б; 20 – А.

Тематика презентаций

1. Тождественные преобразования рациональных выражений
2. Тождественные преобразования дробно-рациональных выражений
3. Тождественные преобразования иррациональных выражений.
4. Тождественные преобразования показательных выражений
5. Тождественные преобразования логарифмических выражений
6. Решение алгебраических уравнений и неравенств
7. Решение рациональных уравнений и неравенств
8. Решение иррациональные уравнений и неравенств
9. Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля
10. Решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля
11. Решение логарифмических уравнений и неравенств
12. Решение показательных уравнений и неравенств
13. Решение уравнений и неравенств с параметрами
14. Преобразование тригонометрических выражений
15. Доказательство тождеств и неравенств
16. Решение тригонометрических уравнений и неравенств
17. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями
18. Решение уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями
19. Треугольники. Признаки равенства треугольников
20. Медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника
21. Измерение отрезков и углов. Соотношения между сторонами и углами треугольника
22. Биссектриса угла, серединный перпендикуляр к отрезку
23. Многоугольники. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция: определения, свойства и признаки
24. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции
25. Теорема Пифагора. Теоремы синусов и косинусов. Теорема Стюарта
26. Подобие треугольников
27. Окружность. Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей
28. Центральные и вписанные углы
29. Углы между хордами, секущими и касательными
30. Свойства хорд, секущих и касательных. Теорема Птолемея
31. Вписанные и описанные треугольники. Вневписанные окружности
32. Вписанные и описанные четырехугольники. Правильные многоугольники
33. Длина окружности и площадь круга
34. Параллельность прямых в пространстве
35. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей
36. Угол между прямыми в пространстве
37. Перпендикулярность прямых. Перпендикулярность прямой и плоскости

38. Теорема о трех перпендикулярах. Расстояние между прямыми и плоскостями
39. Многогранники. Тетраэдр, пирамида и их свойства
40. Параллелепипед, призма и их свойства
41. Усеченная пирамида. Сечения выпуклых многогранников
42. Вписанные и описанные сферы
43. Цилиндр. Конус. Усеченный конус. Шар
44. Комбинации многогранников и круглых тел
45. Объем параллелепипеда, призмы, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара
46. Площадь поверхности цилиндра, конуса, усеченного конуса, сферы и ее частей

Задачи

Расчетная работа 1

Вариант 1

1.Решить уравнения.

$|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$

$\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}=5$

2.Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}*\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}*\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+a}$$

3. Решить неравенства: а) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$;

б) $|x-1|+|2x+1|>3+x$;

в) $5^{2x+1}>5^x+4$;

г) $\log_7 x-\log_x \dfrac{1}{7}\geq 2$;

д) $\sqrt{3x-2}>1$.

Вариант 2

1.Решить уравнения

$|x^2-9|+|x-2|=5$

$\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2+18}=5$

2.Упростить выражение

$$\frac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}*\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{a}+a}$$

3.Решить неравенства:

а) $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1}<0$;

б) $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right|<3$;

в) $4^{5+4x}-15\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3+4x}+8\geq 0$;

г) $\log_2(2-3x)>4x+1$;

д) $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x$.

Расчетная работа 2

1. Решить неравенства:

   а) $\log_{a^2} x^2 > 1$

   б) $\log_x (a^2+1) < 0$

   в) $\dfrac{1+\log_{a^2} x}{1+\log_a x} > 1$

   г) $(\log_2 x - 1)\log_2 x + a) > 0$

   д) $\log_a (x+1) > 2\log_x a$

   е) $\lg x + \lg(x-2a) - \lg(3x-4a) > \lg a$

2. При каких a неравенства выполняются при любых значениях $x \in R$

   а) $1+\log_7 (x^2+1) \geq \log_7 (ax^2+4x+a)$

   б) $\log_{a(a+2)} (|x|+3) > 1$

3. При каких a среди решений неравенства содержится единственное целое число?

   а) $\log_{\frac{1}{3}} (8-x) - \log_3 \dfrac{|x-7|}{(x-3)} + \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{|x-5|(x-3)}{3(8-x)} < a$

   б) $\log_3 (x-4) + \log_3 \dfrac{|x-5|}{(9-x)} + \log_3 \dfrac{|x-7|(9-x)}{(x-4)} > a$

4. Решить систему:

   а) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2} \\ x+y = a^2+a \end{cases}$

   б) $\begin{cases} \log_a (1+\dfrac{x}{y}) = 2 - \log_a y \\ \log_a x + \log_a y = 4 \end{cases}$

5. При каких a система имеет решение?

   а) $\begin{cases} \log_2 y + \log_2 (x+1) = 2 \\ y = a - 4x \end{cases}$

   б) $\begin{cases} \log_a x(\dfrac{1}{\log_x 3} + \log_3 y) = \log_3 x \\ \log_3 x \cdot \log_2 (x+y) = 2\log_2 x \end{cases}$

6. При каких a система имеет единственное решение?

   $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ \log_2 (4x+y+3a) - \log_2 (x+y) = 2 \end{cases}$

7. При каких a система

   $\begin{cases} \sin(3(a-y)) + 3\sin x = 0 \\ 2\log_4 (a-y) + 2\log_4 (2\sqrt{y}) = \log_2 \sqrt{y} + 3\log_8 (2x) \end{cases}$

   имеет четное число решений?

8. При каких $a > 0$ точка $x = 3$ является точкой минимума функции $f(x) = 2x^3 - 6a^2x + 3$

9. При каких значениях параметра m точки экстремумов функции

$f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - 4$

лежат в промежутке (–2; 4)

10. Найти все значения $в$, при которых функция

$f(x) = вx^5 - 20x^3 + 5(в + 9)x - 7$

монотонна при всех $x \in R$

11. Найти все значения параметра a, при которых функция

$y = (a + 2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$

монотонно убывает на всей числовой оси.

12. При каких значениях a функция

$f(x) = 2ax^3 + 3(a + 1)x^2 + 6x - 2$

убывает на отрезке $\left[-1;\ -\frac{1}{3}\right]$

13. Найти все a, при которых касательные, проведенные к графику функции

$f(x) = x^3 - ax^2$ в точках пересечения графика с осью абсцесс,

пересекаются под углом $\frac{\pi}{4}$

14. Сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение

$x^5 + x = a + 2x^3$

15. Сколько решений имеет уравнение

$x^2 - 2ax - 1 = 0$

на промежутке $|x| < 2$?

16. Найти все значения a, при которых уравнение

$x|x + 2a| + 1 - a = 0$

имеет единственное решение.

17. При каких a уравнение

$x^3 + ax + 2 = 0$

имеет три корня?

18. Определить как расположены корни уравнения

$ax^2 - 3(a + 1)x + 2a + 7 = 0$

относительно отрезка $[-1;\ 4]$

Расчетная работа 3

Вариант 1

1. Найдите $\cos x$, если $\sin x = \frac{12}{13}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.
2. Исследовать функцию на четность.

а) $f(x) = \frac{\cos x^3}{4 - x^2}$;

б) $f(x) = x^5 \cdot \cos 3x$.

3. Построить и прочитать график функции.

$y = 2\sin x$.

4.Вычислить:

а) $\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3}$;

б) $tg\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot ctg\frac{\pi}{6}$.

5. Решить уравнение:

$2\cos x+\sqrt{3}=0$.

6.Упростить:

$$\frac{\cos(\pi-t)+\cos(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin(2\pi-t)-\sin(\frac{3\pi}{2}-t)}.$$

7. Доказать тождество: $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+tg\alpha\cdot ctg\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Вариант 2

1. Найдите $\sin x$, если $\cos x=-\frac{5}{13}, \pi<x<\frac{3\pi}{2}$.
2. Исследовать функцию на четность.

а) $f(x)=\frac{\cos x^3}{x(25-x^2)}$;

б) $f(x)=x^4\cdot\cos 2x$.

3. Построить и прочитать график функции.

$y=3\cos x$.

4.Вычислить:

а) $\sin\frac{\pi}{4}tg\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}$;

б) $tg\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}ctg\frac{\pi}{3}$.

5. Решить уравнение:

$2\cos x-\sqrt{2}=0$.

6.Упростить:

$$\frac{\sin(\pi+t)\cdot\sin(2\pi+t)}{tg(\pi+t)\cdot\cos(\frac{3\pi}{2}+t)}.$$

7. Доказать тождество: $\frac{\sin^2 t}{1+\cos t}+\sin t\cdot ctgt=1$

Расчетная работа 4

Вариант 1

1. Решить уравнение $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=\sin(-\frac{\pi}{6})$.
2. Решить уравнение $2\cos\frac{x}{2}+1=0$.
3. Решить уравнение $\cos x-\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\pi+x)=0$.

Вариант 2

1. Решить уравнение $\sin(-x)=\sin 2\pi$.

2. Решить уравнение $\cos(3\pi + x) - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sqrt{2}$.

3. Решить уравнение $2\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \sqrt{2}$

Расчетная работа 5

Вариант 1

1. Упростить выражение:
$\cos 24^0 + \cos 48^0 - \cos 84^0 - \cos 12^0$.

2. Вычислить:
$\sin 2x, \cos 2x, tg 2x, ctg 2x, \sin x, tgx, ctgx$

$0 < x < \frac{\pi}{2}, \cos x = \frac{5}{13}.$

3.Решить уравнение:
$1 - \cos 6x = tg 3x$.

4. Решить уравнение:
$\sin z + \sin 2z + \sin 3z = \cos z + \cos 2z + \cos 3z$.

5. Решить уравнение:
$tgx + ctgx = \frac{2}{\cos 4x}$.

Вариант 2

1. Упростить выражение:
$\sin 84^0 \sin 24^0 \sin 48^0 \sin 12^0$.

2. Вычислить:
$\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

3. Решить уравнение:
$\sin 9x = 2\sin 3x$.

4. Решить уравнение:
$\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = 1{,}5$.

5. Решить уравнение:
$tgx + ctgx = \frac{2}{\cos 4x}$

Расчетная работа 6

Вариант 1

1. Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника и одинаково удалённая от его катетов, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40 см. Найти катеты.
2. Доказать, что если в треугольнике отношение тангенсов двух углов равно отношению квадратов синусов этих углов, то треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.
3. Доказать, что если две стороны и высота одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.
4. Перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на диагональ, делит диагональ на отрезки 6 и 15 см. Найти стороны и диагонали параллелограмма, если известно, что разность сторон равна 7 см.

5. Один из углов трапеции равен 30°, боковые стороны перпендикулярны. Найти меньшую боковую сторону трапеции, если её средняя линия равна 10 см., а одно из оснований 8 см.

Вариант 2
1. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами a и b.
2. Доказать, что если в треугольнике выполняется соотношение $a/\cos A = b/\cos B$, то треугольник равнобедренный.
3. Определить вид треугольника, если известно, что его медианы связаны равенством $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$.
4. Диагональ прямоугольника делит его угол в отношении m : n. Найти отношение периметра прямоугольника к его диагонали.
5. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании и имеют длины 13 и 15 см. Найти стороны трапеции, если её высота равна 12 см.

Расчетная работа 7
Вариант 1
1. Две окружности внешне касаются в точке A, BC – их общая внешняя касательная. Доказать, что $\angle BAC = 90°$.
2. В прямоугольном треугольнике с катетами 18 и 24 см. найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностями.
3. Основания трапеции 30 и 12 см., диагонали 20 и 34 см. Найти площадь трапеции.
4. В четырёхугольнике ABCD точки M и N - соответственно середины сторон AD и BC. Доказать, что $2MN \le AB + CD$.
5. В треугольнике ABC площадь равна S и $\angle B = \beta$. Найти наименьшее значение суммы сторон AB и BC.

Вариант 2
1. AB и CD - взаимно перпендикулярные пересекающиеся хорды окружности радиуса R. Доказать, что $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.
2. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 24 и 36 см. Найти катеты.
3. Основания трапеции 62 и 20 см., боковые стороны 45 и 39 см. Найти площадь трапеции.
4. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1. Доказать, что $CC_1 < (CA + CB)/2$.
5. В треугольнике ABC площадь равна S и $\angle B = \beta$. Найти наименьшее значение периметра треугольника.

Расчетная работа 8

Вариант 1
1. Точка P, Q и R взяты на поверхности параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 следующим образом: точка P лежит в грани CC1D1D, точка Q – в грани AA1D1D, точка R – на прямой BB1. Построить сечение параллелепипеда плоскостью PQR.
2. Точка K – середина ребра CC1 куба ABCDA1B1C1D1. Найдите угол между прямыми A1D и D1K.
3. Основанием пирамиды является правильный ΔABC. Ее боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания, и SB=AB. На ребре SA взята точка D такая, что SD:SA=1:3. Найдите угол между прямой BD и плоскостью SAC.

Вариант 2

1. Точка P, Q и R взяты на поверхности параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 следующим образом: точка P лежит на диагонали A1C1, точка R на ребре BB1, а точка Q – на ребре DD1. Построить сечение параллелепипеда плоскостью PQR.
2. Все плоские углы при вершине S правильной треугольной пирамиды SABC прямые. Найдите угол между прямыми SC и AD, где D – середина ребра BC.
3. Основанием прямого параллелепипеда ABCDA1B1C1D1, является параллелограмм ABCD с углом при вершине A, равным 60^o. Точка O – точка пересечения диагоналей основания. Найти угол между прямой B1O и плоскостью CC1D1, если AB:AD:AA1=1:2:1.

Задания для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к зачету

1. Рациональные и дробно-рациональные выражения.
2. Иррациональные выражения.
3. Показательные и логарифмические выражения.
4. Алгебраические, рациональные и иррациональные уравнения и неравенства.
5. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.
6. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.
7. Уравнения и неравенства с параметрами.
8. Преобразование тригонометрических выражений, доказательство тождеств и неравенств.
9. Тригонометрические уравнения и неравенства.
10. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями, доказательство тождеств и неравенств.
11. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями.
12. Треугольники. Признаки равенства треугольников.
13. Медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника.
14. Измерение отрезков и углов. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Биссектриса угла, серединный перпендикуляр к отрезку.
15. Многоугольники. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция: определения, свойства и признаки.
16. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции.
17. Теорема Пифагора. Теоремы синусов и косинусов. Теорема Стюарта.
18. Подобие треугольников.
19. Окружность. Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей.
20. Центральные и вписанные углы.
21. Углы между хордами, секущими и касательными.
22. Свойства хорд, секущих и касательных. Теорема Птолемея.
23. Вписанные и описанные треугольники. Вневписанные окружности.
24. Вписанные и описанные четырехугольники. Правильные многоугольники.
25. Длина окружности и площадь круга.
26. Параллельность прямых в пространстве.
27. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.
28. Угол между прямыми в пространстве.
29. Перпендикулярность прямых. Перпендикулярность прямой и плоскости.
30. Теорема о трех перпендикулярах. Расстояние между прямыми и плоскостями.
31. Многогранники. Тетраэдр, пирамида и их свойства.
32. Параллелепипед, призма и их свойства.
33. Усеченная пирамида. Сечения выпуклых многогранников.
34. Вписанные и описанные сферы.
35. Цилиндр. Конус. Усеченный конус. Шар.
36. Комбинации многогранников и круглых тел.

37. Объем параллелепипеда, призмы, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара.
38. Площадь поверхности цилиндра, конуса, усеченного конуса, сферы и ее частей.

Схема соответствия типовых контрольных заданий и оцениваемых знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Формируемая компетенция	*Показатели сформированности компетенции*	*Типовое контрольное задание*
ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ОПК-8.1	Тест Вопросы к зачету Презентация
	ОПК-8.2	
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1.1	Вопросы к зачету Тест Задачи Презентация
	ПК-1.2	
	ПК-1.3	