

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Егорова Галина Викторовна  
Должность: Проректор по учебной работе  
Дата подписания: 16.11.2022 15:57:58  
Уникальный программный ключ:  
4963a4167398d8232817460c35a70d1868d7c25

**Министерство образования Московской области  
Государственное образовательное учреждение высшего образования  
Московской области  
«Государственный гуманитарно-технологический университет»**

**УТВЕРЖДАЮ  
проректор**



**20 мая 2022 г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.07.07**

**Элементарная математика с практикумом по решению задач**

<b>Направление подготовки</b>	<b>44.03.01 Педагогическое образование</b>
<b>Направленность (профиль) программы</b>	<b>Математика</b>
<b>Квалификация выпускника</b>	<b>Бакалавр</b>
<b>Форма обучения</b>	<b>Очная</b>

**Орехово-Зуево**

**2022 г.**

## 1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа дисциплины составлена на основе учебного плана 44.03.01 Педагогическое образование по профилю Математика 2022 года начала подготовки.

## 2. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

### Цели дисциплины

Целью освоения дисциплины «Элементарная математика с практикумом по решению задач» является формирование у студентов необходимых компетенций, позволяющих:

1. привести в определенную систему знания школьного курса математики;
2. пополнить знания школьного курса математики новыми интересными фактами.

### Задачи дисциплины

1. Содействовать средствами дисциплины «Элементарная математика с практикумом по решению задач» развитию у студентов мотивации к педагогической деятельности, профессионального мышления, коммуникативной готовности, общей культуры;
2. сформировать навыки решения задач школьного курса математики различного уровня.

### Знания и умения обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент должен обладать следующими компетенциями:	Коды формируемых компетенций
<b>Общепрофессиональные компетенции (ОПК):</b>	
Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ОПК-8
<b>Профессиональные компетенции (ПК):</b>	
Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1

### Индикаторы достижения компетенции

Код и наименование компетенции	Наименование индикатора достижения компетенции
ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	<b>ОПК-8.1</b> Применяет методы анализа педагогической ситуации, профессиональной рефлексии на основе специальных научных знаний, в том числе в предметной области. <b>ОПК-8.2</b> Проектирует и осуществляет учебно-воспитательный процесс с опорой на знания предметной области, психолого-педагогические знания и научно-обоснованные закономерности организации образовательного процесса.
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в	<b>ПК-1.1</b> Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). <b>ПК-1.2</b> Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО. <b>ПК-1.3</b>

предметной области при решении профессиональных задач	Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные.
---	---

### 3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина Б1.О.07.07 Элементарная математика с практикумом по решению задач относится к обязательной части блока 1 Дисциплины (модули).

Программа курса предполагает наличие у студентов знаний по дисциплинам школьного курса математики.

Дисциплины, для изучения которых необходимы знания данного курса: «Геометрия», «Алгебра», «Математический анализ».

### 4. Структура и содержание дисциплины

№ п/п	Раздел/тема	Семестры	Всего	Виды учебных занятий			Промежуточная аттестация
				Контактная работа		СРС	
				ЛК (лекции)	ПЗ (практич. занятия)		
1	Тема 1. Тождественные преобразования выражений	1	36		12	24	
2	Тема 2. Решение уравнений	1	36		12	24	
3	Тема 3. Решение неравенств	1	36		12	24	
	Промежуточная аттестация – зачет	1					
	<b>Итого за 1 семестр</b>	<b>1</b>	<b>108</b>		<b>36</b>	<b>72</b>	зачет
4	Тема 4. Тригонометрия	2	72		36	36	
	<b>Итого за 2 семестр</b>		<b>72</b>		<b>36</b>	<b>36</b>	
5	Тема 5. Планиметрия	3	72		36	36	
6	Тема 6. Стереометрия	3	72		36	36	
	Промежуточная аттестация – экзамен	3					36
	<b>Итого за 3 семестр</b>		<b>180</b>		<b>72</b>	<b>72</b>	<b>36</b>

Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

#### Практические занятия

##### Практическое занятие 1,2

Тема: *Тождественные преобразования выражений*

Учебные цели:

- научиться выполнять разложение многочлена на множители
- овладеть навыком применения формул сокращенного умножения.

**Основные термины и понятия:**

- а. Многочлены
- б. Тождественные преобразования
- в. Формулы сокращенного умножения

**Практическое занятие 3,4****Тема: Тождественные преобразования выражений****Учебные цели:**

- научиться выполнять тождественные преобразования рациональных выражений;
- овладеть навыком нахождения области определения рационального выражения.

**Основные термины и понятия:**

- г. Тождество
- д. Тождественные преобразования
- е. Рациональные выражения
- ж. Область определения

**Практическое занятие 5, 6****Тема: Тождественные преобразования выражений****Учебные цели:**

- научиться выполнять тождественные преобразования иррациональных выражений;
- овладеть навыком нахождения области определения иррационального выражения;
- научиться освобождаться от иррациональности в знаменателе.

**Основные термины и понятия:**

- а. Тождество
- б. Тождественные преобразования
- в. Иррациональные выражения
- г. Арифметический корень

**Практическое занятие 7, 8****Тема: Решение уравнений****Учебные цели:**

- научиться выполнять равносильные преобразования уравнений.

**Основные термины и понятия:**

- а. Уравнение
- б. Область определения уравнения
- в. Решение уравнения
- г. Корень уравнения
- д. Посторонний корень
- е. Равносильные уравнения
- ж. Совокупность уравнений

**Практическое занятие 9****Тема: Решение уравнений****Учебные цели:**

- научиться решать уравнения, содержащие неизвестные под знаком абсолютной величины.

**Основные термины и понятия:**

- з. Уравнение
- и. Модуль
- к. Раскрытие абсолютной величины
- л. Корень уравнения
- м. Посторонний корень
- н. Равносильные уравнения
- о. Совокупность уравнений

**Практическое занятие 10****Тема: Решение уравнений****Учебные цели:**

- научиться решать иррациональные уравнения.

**Основные термины и понятия:**

- п. Уравнение
- р. Решение уравнения
- с. Иррациональность
- т. Корень уравнения
- у. Посторонний корень
- ф. Равносильные уравнения
- х. Совокупность уравнений

**Практическое занятие 11, 12****Тема: Решение уравнений****Учебные цели:**

- научиться решать показательные и логарифмические уравнения.

**Основные термины и понятия:**

- ц. Уравнение
- ч. Область определения уравнения
- ш. Решение уравнения
- щ. Корень уравнения
- ы. Посторонний корень
- э. Равносильные уравнения
- ю. Совокупность уравнений

**Практическое занятие 13, 14****Тема: Решение неравенств****Учебные цели:**

- научиться находить область определения неравенства;
- овладеть основными методами решения неравенств.

**Основные термины и понятия:**

- а. Неравенство
- б. Область определения неравенства
- в. Решение неравенства
- г. Равносильные неравенства

**Практическое занятие 15, 16****Тема: Решение неравенств****Учебные цели:**

- научиться решать иррациональные неравенства.

**Основные термины и понятия:**

- д. Неравенство

- е. Область определения неравенства
- ж. Решение неравенства
- з. Равносильные неравенства

### **Практическое занятие 17, 18**

#### **Тема: *Решение неравенств***

##### **Учебные цели:**

- научиться решать показательные и логарифмические неравенства.

##### **Основные термины и понятия:**

- и. Неравенство
- к. Область определения неравенства
- л. Решение неравенства
- м. Равносильные неравенства

### **Практическое занятие 19, 20**

#### **Тема: *Тригонометрия***

##### **Учебные цели:**

- научиться выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений;
- овладеть навыком нахождения области определения тригонометрического выражения.

##### **Основные термины и понятия:**

- д. Тождество
- е. Тождественные преобразования
- ж. Тригонометрические выражения

### **Практическое занятие 21, 22**

#### **Тема: *Тригонометрия***

##### **Учебные цели:**

- научиться выполнять тождественные преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции;
- овладеть навыком нахождения области определения выражения, содержащего обратные тригонометрические функции.

##### **Основные термины и понятия:**

- з. Тождество
- и. Тождественные преобразования
- к. Обратные тригонометрические функции

### **Практическое занятие 23-29**

#### **Тема: *Тригонометрия***

##### **Учебные цели:**

- овладеть основными методами решения тригонометрических уравнений;
- научиться решать однородные тригонометрические уравнения.

##### **Основные термины и понятия:**

- а. Уравнение
- б. Решение уравнения
- в. Корень уравнения
- г. Посторонний корень
- д. Равносильные уравнения
- е. Совокупность уравнений

### **Практическое занятие 30-36**

#### **Тема: Тригонометрия**

##### **Учебные цели:**

- овладеть основными методами решения тригонометрических неравенств.

##### **Основные термины и понятия:**

- Неравенство
- Решение неравенства
- Равносильные неравенства

### **Практическое занятие 37-39**

#### **Тема: Планиметрия**

##### **Учебные цели:**

- научиться применять признаки равенства треугольников при решении задач.

##### **Основные термины и понятия:**

- Треугольник
- Вершины треугольника
- Стороны треугольника
- Прямоугольный треугольник
- Равнобедренный треугольник
- Равносторонний треугольник

### **Практическое занятие 40-42**

#### **Тема: Планиметрия**

##### **Учебные цели:**

- научиться решать задачи, используя основные свойства линий в треугольнике.

##### **Основные термины и понятия:**

- Высота треугольника
- Медиана треугольника
- Биссектриса треугольника
- Средняя линия треугольника

### **Практическое занятие 43-45**

#### **Тема: Планиметрия**

##### **Учебные цели:**

- овладеть методами решения задач, основанными на теореме Пифагора, теореме синусов и теореме косинусов;
- научиться применять теоремы Пифагора, синусов и косинусов при решении треугольников.

##### **Основные термины и понятия:**

- Теорема Пифагора
- Теорема синусов
- Теорема косинусов
- Катет
- Гипотенуза
- Проекция
- Перпендикуляр

### **Практическое занятие 46-48**

#### **Тема: Планиметрия**

##### **Учебные цели:**

- научиться решать задачи, используя свойства замечательных точек в треугольнике.

**Основные термины и понятия:**

- Ортоцентр треугольника
- Центр масс треугольника

**Практическое занятие 49-51**

**Тема: Планиметрия**

**Учебные цели:**

- научиться находить решения задач, основанные на признаках четырехугольников.

**Основные термины и понятия:**

- Параллелограмм
- Прямоугольник
- Ромб
- Квадрат
- Трапеция

**Практическое занятие 52-54**

**Тема: Планиметрия**

**Учебные цели:**

- научиться решать задачи на взаимное расположение прямой и окружности;
- научиться решать задачи на взаимное расположение двух окружностей.

**Основные термины и понятия:**

- Окружность
- Радиус окружности
- Диаметр окружности
- Центр окружности
- Хорда
- Дуга окружности

**Практическое занятие 55-57**

**Тема: Стереометрия**

**Основные термины и понятия:**

Параллельность прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.

**Практическое занятие 58-60**

**Тема: Стереометрия**

**Учебные цели:**

- научиться использовать признак параллельности прямых и плоскостей при решении задач.

**Основные термины и понятия:**

- Прямая
- Плоскость
- Проекция
- Скрещивающиеся прямые
- Параллельность

**Практическое занятие 61-63**

**Тема: Стереометрия**



**Учебные цели:**

- научиться использовать признак перпендикулярности прямой и плоскости при решении задач.

**Основные термины и понятия:**

- Прямая
- Плоскость
- Перпендикуляр
- Ортогональная проекция
- Основание перпендикуляра

**Практическое занятие 64-66****Тема: *Стереометрия*****Учебные цели:**

- научиться решать задачи стереометрии, связанные с призмой, параллелепипедом и кубом.

**Основные термины и понятия:**

- Многогранник
- Грань многогранника
- Ребро многогранника
- Вершина многогранника
- Боковая поверхность
- Диагональное сечение

**Практическое занятие 67-69****Тема: *Стереометрия*****Учебные цели:**

- научиться решать задачи стереометрии, связанные с пирамидой и с усеченной пирамидой.

**Основные термины и понятия:**

- Основание пирамиды
- Высота пирамиды
- Боковые ребра пирамиды
- Вершины пирамиды
- Апофема

**Практическое занятие 70-72****Тема: *Стереометрия*****Учебные цели:**

- научиться решать задачи стереометрии, связанные с цилиндром, конусом и сферой.

**Основные термины и понятия:**

- Основание цилиндра (конуса)
- Боковая поверхность
- Образующая
- Осевое сечение

**5. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

## Перечень литературы для организации самостоятельной работы

1. Далингер, В. А. Математика: логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 176 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-05316-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.ura.it.ru/bcode/492730> (дата обращения: 22.05.2022).
2. Далингер, В. А. Математика: тригонометрические уравнения и неравенства: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 136 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08453-5. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.ura.it.ru/bcode/492901> (дата обращения: 22.05.2022).
3. Далингер, В. А. Математика: задачи с модулем: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 364 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04793-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.ura.it.ru/bcode/492899> (дата обращения: 22.05.2022).
4. Гусев, В. А. Геометрия: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Гусев, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 280 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08897-7. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.ura.it.ru/bcode/494638> (дата обращения: 22.05.2022).

### Задания для самостоятельной работы.

#### Рациональные уравнения Линейные уравнения

Пример 1. Решить уравнение

$$2x - 3 + 4(x - 1) = 5.$$

Решение. Последовательно раскроем скобки, приведём подобные члены и найдём  $x$ :  
 $2x - 3 + 4x - 4 = 5$ ,  $2x + 4x = 5 + 4 + 3$ ,  
 $6x = 12$ ,  $x = 2$ .

Ответ: 2.

Пример 2. Решить уравнение

$$2x - 3 + 2(x - 1) = 4(x - 1) - 7.$$

Решение.  $2x + 2x - 4x = 3 + 2 - 4 - 7$ ,  $0x = -6$ .

Ответ:  $\emptyset$ .

Пример 3. Решить уравнение.

$$2x + 3 - 6(x - 1) = 4(x - 1) + 5.$$

Решение.  $2x - 6x + 3 + 6 = 4 - 4x + 5$ ,

$$-4x + 9 = 9 - 4x,$$

$$-4x + 4x = 9 - 9,$$

$$0x = 0.$$

Ответ: Любое число.

#### Системы линейных уравнений

Пример 1. решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$$

Решение. Решить систему линейных уравнений можно способом подстановки,

который состоит в том, что какого-либо уравнения системы выражают одно неизвестное через другие неизвестные, а затем подставляют значение этого неизвестного в остальные уравнения.

Из первого уравнения выражаем:  $x = (8 - 3y) / 2$ . Подставляем это выражение во второе уравнение и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = (8 - 3y) / 2, \\ 3(8 - 3y) / 2 + 2y = 7. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем  $y = 2$ . С учётом этого из первого уравнения  $x = 1$ .

Ответ: (1; 2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 7. \end{cases}$$

Решение. Система не имеет решений, так как два уравнения системы не могут удовлетворяться одновременно (из первого уравнения  $x + y = 3$ , а из второго  $x + y = 3,5$ ).

Ответ: Решений нет.

Пример 3. решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + 2y = 10. \end{cases}$$

Решение. Система имеет бесконечно много решений, так как второе уравнение получается из первого путём умножения на 2 (т.е. фактически есть всего одно уравнение с двумя неизвестными).

Ответ: Бесконечно много решений.

Пример 4. решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x - y + 4z = 1, \\ -x + 6y + z = 5. \end{cases}$$

Решение. При решении систем линейных уравнений удобно пользоваться методом Гаусса, который состоит в преобразовании системы к треугольному виду.

Умножаем первое уравнение системы на  $-2$  и, складывая полученный результат со вторым уравнением, получаем  $-3y + 6z = -3$ . Это уравнение можно переписать в виде  $y - 2z = 1$ . Складывая первое уравнение с третьим, получаем  $7y = 7$ , или  $y = 1$ .

Таким образом, система приобрела треугольный вид

$$\begin{cases} x + y - z = 2, \\ y - 2z = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Подставляя  $y = 1$  во второе уравнение, находим  $z = 0$ . Подставляя  $y = 1$  и  $z = 0$  в первое уравнение, находим  $x = 1$ .

Ответ: (1; 1; 0).

Пример 5. при каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a + 1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Решение. Из первого уравнения выражаем  $x$ :

$$x = -(a/2)y + a/2 + 1.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$(a + 1)(-(a/2)y + a/2 + 1) + 2ay = 2a + 4.$$

Далее умножим обе части уравнения на 2 и упростим его:

$$(a + 1)(a + 2 - ay) + 4ay = 4a + 8,$$

$$4ay - a(a+1)y = 4(a+2) - (a+1)(a+2),$$

$$ya(4-a-1) = (a+2)(4-a-1),$$

$$ya(3-a) = (a+2)(3-a).$$

Анализируя последнее уравнение, отметим, что при  $a = 3$  оно имеет вид  $0y = 0$ , т.е. оно удовлетворяется при любых значениях  $y$ .

Ответ: 3.

### Метод введения новых неизвестных при решении уравнений и систем уравнений

Пример 1. Решим уравнение  $12 / (x^2 + 2x) - 3 / (x^2 + 2x - 2) = 1$ .

Решение. Если попробовать привести дробь в левой части уравнения к одному знаменателю, то получим уравнение четвёртой степени, которое мы умеем решать. Чтобы решить заданное уравнение, заметим, что в обе дроби входит одно и то же выражение  $x^2 + 2x$ . Поэтому введём новое неизвестное  $y$ , положив, что  $y = x^2 + 2x$ . Тогда уравнение примет вид

$$12 / y - 3 / (y - 2) = 1 \quad \text{или} \quad (y^2 - 11y + 24) / (y(y - 2)) = 0,$$

откуда  $y_1 = 3$ ;  $y_2 = 8$ . Осталось решить уравнения  $x^2 + 2x = 3$  (его корни  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3$ ) и  $x^2 + 2x = 8$  (его корни  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = -4$ ).

Применённый метод называется методом введения новых неизвестных, и его полезно применять, когда неизвестное входит в уравнение всюду в виде одной и той же комбинации (особенно если эта комбинация содержит степени неизвестного выше первой).

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2 / x + 3 / y = 8, \\ 5 / x - 2 / y = 1. \end{cases}$$

Решение. Обозначим  $1 / x$  через  $U$ , а  $1 / y$  через  $V$ . Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 2U + 3V = 8, \\ 5U - 2V = 1, \end{cases}$$

т.е. получится система двух линейных уравнений с двумя неизвестными  $U$  и  $V$ . Из первого уравнения выражаем  $U$  через  $V$ :  $U = 4 - 3V/2$ , и подставляя во второе:  $5(4 - 3V/2) - 2V = 1$ , откуда  $V = 2$ . Теперь находим  $U = 1$  и решаем уравнения  $1 / x = 1$ ,  $1 / y = 2$ .

Ответ:  $x = 1$ ,  $y = 0,5$ .

Пример 3.

$$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680.$$

Решение.  $(x-4)(x-7) \cdot (x-5)(x-6) = 1680$ , т.е.

$$(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680.$$

Обозначим  $x^2 - 11x + 28 = t$ , тогда  $t(t+2) = 1680$ ,  $t^2 + 2t - 1680 = 0$ ,  $t_1 = -42$ ;  $t_2 = 40$ .

Поэтому

$$x^2 - 11x + 28 = -42; \quad x^2 - 11x + 70 = 0; \quad D = 121 - 280 < 0 \Rightarrow x_{1,2} \in \emptyset.$$

$$x^2 - 11x + 28 = 40; \quad x^2 - 11x - 12 = 0; \quad x_1 = 12; \quad x_2 = -1.$$

Ответ:  $x_1 = 12$ ;  $x_2 = -1$ .

Пример 4.

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Решение. Это возвратное уравнение. Разделим обе части уравнения на  $x^2 \neq 0$ , получим

$$2x^2 + 3x - 16 + 3 / x + 2 / x^2 = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$2(x^2 + 1 / x^2) + 3(x + 1 / x) - 16 = 0,$$

обозначим  $x + 1 / x = t$ , тогда  $x^2 + 2 + 1 / x^2 = t^2$ , т.е.  $x^2 + 1 / x^2 = t^2 - 2$ ,

получаем

$$2(t^2 - 2) + 3t - 16 = 0, \text{ т.е. } 2t^2 + 3t - 20 = 0, t_1 = -4; t_2 = 5/2 = 2,5.$$

Следовательно, имеем

$$x + 1/x = -4; x^2 + 4x + 1 = 0; x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3},$$

$$x + 1/x = 2,5; 2x^2 - 5x + 2 = 0; x_3 = 2; x_4 = 1/2.$$

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}; x_3 = 2; x_4 = 1/2.$$

Пример 5.

$$(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16.$$

Решение. Сделаем подстановку  $x = t - 4$ . Тогда получаем  $(t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 16$ , т.е.

$$t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 16,$$

т.е.  $2t^4 + 12t^2 - 14 = 0$ , или  $t^4 + 6t^2 - 7 = 0$ . Положим  $t^2 = z \geq 0$ , тогда

$$z^2 + 6z - 7 = 0, z_1 = -7; z_2 = 1.$$

С учётом  $t^2 = z \geq 0$  отбрасываем  $z_1$ . Итак,  $z = 1$ , т.е.  $t^2 = 1$ , отсюда  $t_1 = -1; t_2 = 1$ . Следовательно,  $x_1 = -1 - 4 = -5$  и  $x_2 = 1 - 4 = -3$ .

$$\text{Ответ: } x_1 = -5 \text{ и } x_2 = -3.$$

Пример 6.

$$13x / (2x^2 + x + 3) + 2x / (2x^2 - 5x + 3) = 6.$$

Решение. Разделим числитель и знаменатель дробей на  $x \neq 0$ :

$$13 / (2x + 1 + 3/x) + 2 / (2x - 5 + 3/x) = 6,$$

обозначим  $2x + 3/x = t$ . Получаем  $13 / (t + 1) + 2 / (t - 5) = 6$ , т.е.

$$13t - 65 + 2t + 2 = 6t^2 - 24t - 30, \text{ т.е.}$$

$$6t^2 - 39t + 33 = 0, \text{ т.е. } 2t^2 - 13t + 11 = 0,$$

$$t_1 = 1; t_2 = 5,5.$$

Следовательно:

$$2x + 3/x = 1; 2x^2 - x + 3 = 0; D = 1 - 24 < 0 \Rightarrow x \in \emptyset.$$

$$2x + 3/x = 5,5; 4x^2 - 11x + 6 = 0; x_1 = 2; x_2 = 0,75.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 2; x_2 = 0,75.$$

Пример 7.

$$x^4 - 2x^3 + x - 0,75 = 0.$$

Решение. Выделим полный квадрат, прибавив и вычтя в левой части уравнения  $x^2$ :

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + x - 0,75 = 0, \text{ т.е.}$$

$$(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - 0,75 = 0.$$

Пусть  $x^2 - x = t$ , тогда  $t^2 - t - 0,75 = 0$ ,  $x_1 = -0,5; x_2 = 1,5$ .

Возвращаясь к старой переменной, получаем:

$$x^2 - x = -0,5; x^2 - x + 0,5 = 0; D = 1 - 2 < 0 \Rightarrow x \in \emptyset.$$

$$x^2 - x = 1,5; x^2 - x - 1,5 = 0; x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{7}) / 2.$$

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{7}) / 2.$$

Пример 8.

$$x^2 + 81x^2 / (9 + x)^2 = 40.$$

Решение. Воспользуемся формулой:  $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$  ( $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow \Rightarrow a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$ ). Получаем:

$$(x - 9x / (9 + x))^2 + 2x \cdot 9x / (9 + x) = 40, \text{ или}$$

$$(x^2 / (9 + x))^2 + 18x^2 / (9 + x) = 40.$$

Пусть:  $(x^2 / (9 + x)) = t$ . Тогда  $t^2 + 18t - 40 = 0$ ,  $t_1 = -20; t_2 = 2$ . Получаем два уравнения:

$$(x^2 / (9 + x)) = 2; x^2 - 2x - 18 = 0; x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19},$$

$$(x^2 / (9 + x)) = -20; x^2 + 20x + 180 = 0; D = 400 - 720 < 0, \Rightarrow x \in \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}.$$

## Уравнения и системы уравнений с параметрами

Пример 1. Решим уравнение  $px = 6$  с неизвестным  $x$  и параметром  $p$ . Если  $p \neq 0$ , то можно разделить обе части уравнения на  $p$ , и тогда мы находим корень уравнения  $x = 6/p$ . Если  $p = 0$ , то уравнение корней не имеет, потому что  $0 \cdot x = 0$  для любого  $x$ .

Ответ: при  $p \neq 0$  уравнение имеет единственный корень  $x = 6/p$ ; при  $p = 0$  уравнение корней не имеет.

Пример 2. Сравнить:  $-a$  и  $3a$ .

Решение. Естественно рассмотреть три случая:

Если  $a < 0$ , то  $-a > 3a$ ;

Если  $a = 0$ , то  $-a = 3a$ ;

Если  $a > 0$ , то  $-a < 3a$ .

Пример 3. Решить уравнения  $ax = 1$ .

Решение. На первый взгляд представляется возможным сразу дать ответ:  $x = 1/a$

а. Однако при  $a = 0$  данное уравнение решений не имеет, и верный ответ выглядит так:

Ответ: Если  $a = 0$ , то нет решений; если  $a \neq 0$ , то  $x = 1/a$ .

Пример 4. Решить уравнение  $(a^2 - 1)x = a + 1$ .

Решение. Нетрудно сообразить, что при решении этого уравнения достаточно рассмотреть такие случаи:

1)  $a = 1$ ; тогда уравнение принимает вид  $0x = 2$  и не имеет решений;

2)  $a = -1$ ; получаем  $0x = 0$ , и очевидно  $x$  — любое.

3)  $a \neq \pm 1$ ; имеем  $x = 1/(a - 1)$ .

Сделаем одно замечание. Существенным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем примерам, где решение как бы “ветвится” в зависимости от значений параметра. В подобных случаях составление ответа — это сбор ранее полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения.

Ответ: Если  $a = -1$ , то  $x$  — любое число;  $a = 1$ , то нет решений; если  $a \neq \pm 1$ , то  $x = 1/(a - 1)$ .

Пример 5. При каких  $a$  уравнение  $ax^2 - x + 3 = 0$  имеет единственное решение?

Решение. Прежде всего обратим внимание на распространённую ошибку: считать исходное уравнение квадратным. На самом деле это уравнение степени, не выше второй. Пользуясь этим соображением, естественно начать решение, рассмотрев случай, когда  $a = 0$ , то очевидно данное уравнение имеет единственное решение. Если же  $a \neq 0$ , то имеем дело с квадратным уравнением. Его дискриминант  $1 - 12a$  принимает значение, равное нулю, при  $a = 1/12$ .

Ответ:  $a = 0$  или  $a = 1/12$ .

Пример 6. при каких  $a$  уравнение  $(a - 2)x^2 + (4 - 2a)x + 3 = 0$  имеет единственное решение?

Решение. Понятно, что надо начинать со случая  $a = 2$ . Но при  $a = 2$  исходное уравнение вообще не имеет решений. Если  $a \neq 2$ , то данное уравнение — квадратное, и, казалось бы, искомые значения параметра — это корни дискриминанта. Однако дискриминант обращается в нуль при  $a = 2$  или  $a = 5$ . Поскольку мы установили, что  $a = 2$  не подходит, то

Ответ:  $a = 5$ .

Вероятно, в двух последних примерах ничего сложного нет (тем более, если они уже решены). Однако, на наш взгляд, параметр в этих задачах проявляет своё “коварство”, особенно для начинающих. Поэтому полезно рассмотреть ещё несколько примеров, где параметр “расставляет ловушки”.

Пример 7. При каких значениях  $a$  уравнение  $ax^2 + 4x + a + 3 = 0$  имеет более одного корня?

Решение. При  $a = 0$  уравнение имеет единственный корень, что не удовлетворяет условию. При  $a \neq 0$  исходное уравнение, будучи квадратным, имеет два корня, если его дискриминант  $16 - 4a^2 - 12a$  — положительный. Отсюда получаем  $-4 < a < 1$ . Однако в полученный промежуток  $(-4; 1)$  входит число  $0$ , которое, как мы уже проверили, неприемлемо.

Ответ:  $-4 < a < 0$  или  $0 < a < 1$ .

Пример 8. При каких  $a$  уравнение  $a(a + 3)x^2 + (2a + 6)x - 3a - 9 = 0$  имеет более одного корня?

Решение. Стандартный шаг — начать со случаев  $a = 0$  и  $a = -3$ . При  $a = 0$  уравнение имеет единственное решение. Любопытно, что при  $a = -3$  решением уравнения служит любое действительное число. При  $a = -3$  решением уравнения служит любое действительное число. При  $a \neq -3$  и  $a \neq 0$ , разделив обе части данного уравнения на  $a + 3$ , получим квадратное уравнение  $ax^2 + 2x - 3 = 0$ , дискриминант которого  $4(1 + 3a)$  положителен при  $a > -1/3$ . Опыт предыдущих примеров подсказывает, что из промежутка  $(-1/3; \infty)$  надо исключить точку  $a = 0$ , а в ответ не забыть включить  $a = -3$ .

Ответ:  $a = -3$  или  $-1/3 < a < 0$ , или  $a > 0$ .

Пример 9. При каких значениях  $a$  уравнение  $(x^2 - ax + 1) / (x + 3) = 0$  имеет единственное решение?

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Наличие квадратного уравнения и условие единственности решения, естественно приведут к поиску корней дискриминанта. Вместе с тем условие  $x \neq -3$  должно привлечь внимание. И “тонкий момент” заключается в том, что квадратное уравнение системы может иметь два корня! Но обязательно только один из них должен равняться  $-3$ . Имеем  $D = a^2 - 4$ , отсюда  $D = 0$ , если  $a = \pm 2$ ;  $x = -3$  — корень уравнения  $x^2 - ax + 1 = 0$  при  $a = -10/3$ , причём при таком значении  $a$  второй корень квадратного уравнения отличен от  $-3$ .

Ответ:  $a = \pm 2$  или  $a = -10/3$ .

Пример 10. При каких  $a$  уравнение  $ax^2 = a^2$  равносильно неравенству  $|x - 3| \geq a$ ?

Решение. При  $a \neq 0$  уравнение имеет единственное решение, а неравенство — бесконечно много. Если  $a = 0$ , то решением как уравнения, так и неравенства является всё множество действительных чисел. Следовательно, требованию задачи удовлетворяет только  $a = 0$ .

Ответ:  $a = 0$ .

Пример 11. Решить уравнение с параметрами

$$(a^2 - 9)x = a^2 + 2a - 3.$$

Решение. Уравнение имеет смысл при любых значениях параметра. Запишем уравнение в виде:

$$(a - 3)(a + 3)x = (a + 3)(a - 1).$$

Если  $a = -3$ , то уравнение принимает вид:  $0x = 0$ . Отсюда следует, что при  $x \in \mathbb{R}$ , т.е. решением уравнения является любое действительное число. Если  $a \neq -3$ , то уравнение принимает вид:  $(a - 3)x = a - 1$ . При  $a = 3$  имеем  $0x = 2$ . Уравнение решения не имеет. При  $a \neq -3$  имеем  $x = (a - 1) / (a - 3)$ . Уравнение имеет единственное решение (например,  $x = 3$  при  $a = 4$ ,  $x = 3 / 5$  при  $a = -2$  и т.д.)

$$\text{Ответ: } a = -3, x \in \mathbb{R}; a = 3, x \in \emptyset; a \neq \pm 3, x = (a - 1) / (a - 3).$$

Пример 12.

$$(x - 4) / (x + 1) - 1 / a(x + 1) = -2 / a.$$

Решение. Очевидно,  $(x + 1)a \neq 0$ , т.е.  $x \neq -1$ ,  $a \neq 0$ . Преобразуем данное уравнение, умножив обе его части на  $a(x + 1) \neq 0$ :

$$(x - 4)a - 1 = -2(x + 1), \text{ т.е. } (a + 2)x = 4a - 1.$$

Если  $a = -2$ , то имеем  $0x = -9$ . Следовательно,  $x \in \emptyset$ . Если  $a \neq -2$ , то  $x = (4a + 1) / (a + 2)$ . Но, как мы уже отметили,  $x \neq -1$ . Поэтому надо проверить, нет ли таких значений  $a$  при которых найденное значение  $x$  равно  $-1$ .

$$(4a - 1) / (a + 2) = -1, \text{ т.е. } 4a - 1 = -a - 2, \text{ т.е. } 5a = -1, a = -1 / 5.$$

Значит, при  $a \neq 0$ ,  $a \neq -2$ ,  $a \neq -1 / 5$  уравнение имеет единственное решение  $x = (4a - 1) / (a + 2)$ .

$$\text{Ответ: } x \in \emptyset \text{ при } a \in \{-2, 0, -1 / 5\}; x = (4a - 1) / (a + 2) \text{ при } a \notin \{-2, 0, -1 / 5\}.$$

Пример 13.

$$(a - 5)x^2 + 3ax - (a - 5) = 0.$$

Решение. При  $(a - 5) = 0$ , т.е.  $a = 5$  имеем  $15x - 0 = 0$ , т.е.  $x = 0$ . При  $a - 5 \neq 0$ , т.е.  $a \neq 5$  уравнение имеет корни

$$x_{1,2} = (-3a \pm \sqrt{9a^2 + 4(a - 5)^2}) / (2(a - 5)).$$

$$\text{Ответ: } x = 0 \text{ при } a = 5; x = (-3a \pm \sqrt{9a^2 + 4(a - 5)^2}) / (2(a - 5)) \text{ при } a \neq 5.$$

Пример 14.

$$1 / (x - 1) + 1 / (x - a) = (a + 1) / a.$$

Решение. Отмечаем, что  $a(x - 1)(x - a) \neq 0$ , т.е.  $x \neq 1$ ,  $x \neq a$ ,  $a \neq 0$ . При этих условиях данное уравнение после упрощений принимает вид

$$(a + 1)x^2 - (a^2 + 4a + 1)x + (2a^2 + 2a) = 0.$$

$$\text{Если } a + 1 = 0, \text{ т.е. } a = -1, \text{ имеем, } 2x = 0, \text{ т.е. } x = 0.$$

Если  $a + 1 \neq 0$ , т.е.  $a \neq -1$ , то находим, что

$$x_{1,2} = (a^2 + 4a + 1 \pm \sqrt{a^4 + 2a^2 + 1}) / (2(a + 1)) = (a^2 + 4a + 1 \pm (a^2 + 1)) / (2(a + 1))$$

т.е.  $x_1 = a + 1$ ,  $x_2 = 2a / (a + 1)$ . Найдём значения  $a$ , при которых  $x = 1$  и  $x = a$ , чтобы исключить их.

$$a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0 \text{ — недопустимо по условию;}$$

$$a + 1 = a \Rightarrow 1 = 0 \text{ — невозможно;}$$

$$2 / (a + 1) = 1 \Rightarrow 2a = a + 1, \text{ т.е. } a = 1;$$

$$2 / (a + 1) = a \Rightarrow 2a = a^2 + a, a = 1 \text{ и } a = 0 \text{ — недопустимо.}$$

Итак, если  $a \neq -1$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \neq 1$ , то  $x_1 = a + 1$ ,  $x_2 = 2a / (a + 1)$ .

Теперь рассмотрим, что происходит с уравнением при  $a = 1$ . Найдём корни уравнения:  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 2$ , причём  $x_1 = 1$  не подходит по условию. Теперь выписываем

$$\text{Ответ: } x_1 = a + 1 \text{ и } x_2 = 2 \text{ при } a \neq 0, a \neq \pm 1; x = 0 \text{ при } a = -1; x = 2 \text{ при } a = 1.$$

Пример 15. При каких значениях  $a$  система уравнений



$$\begin{cases} axy + x - y + 1,5 = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0. \end{cases}$$

Имеет единственное решение?

Решение. Умножим второе уравнение на  $a$  и вычтем его из первого уравнения.

Получаем равносильную систему

$$\begin{cases} axy + x - y + 1,5 - ax - 2ay - axy - a = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0, \text{ т.е.} \\ (1 - a)x - (2a + 1)y + 1,5 - a = 0, \\ x + 2y + xy + 1 \end{cases}$$

а) Если  $a = 1$ , то  $-3y + 0,5 = 0$ , т.е.  $y = 1/6$ . Подставив это значение во второе уравнение, находим единственное значение  $x$ . Система имеет единственное решение.

б) Если  $a = -0,5$ , то система имеет единственное решение.

в) При остальных значениях  $a$  сведём систему к квадратному уравнению; из первого уравнения системы находим

$$y = ((1 - a)x + 1,5 - a) / (2a + 1),$$

подставляем во второе уравнение:

$$x + ((2 - 2a)x + 3 - 2a) / (2a + 1) + ((1 - a)x^2 + 1,5x - ax) / (2a + 1) + 1 = 0, \text{ т.е.}$$

$$2ax + 3x - 2ax + 3 - 2a + x^2 - ax^2 + 1,5x - ax + 2a + 1 = 0,$$

$$(1 - a)x^2 + (4,5 - a)x + 4 = 0.$$

Уравнение имеет единственное решение в том случае, когда дискриминант равен нулю:

$$(9/2 - a)^2 - 4 \cdot 4(1 - a) = 0, \text{ т.е. } a^2 + 7a + 17/4 = 0, \text{ т.е. } a = (-7 \pm 4\sqrt{2}) / 2.$$

$$\text{Ответ: } a = 1, a = -1/2, a = (-7 \pm 4\sqrt{2}) / 2.$$

Пример 16.

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0.$$

$$\text{Решение. } x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + abx + acx + bcx - abc = 0,$$

$$\text{группируем: } x^2(x - a) - bx(x - a) - cx(x - a) - cx(x - a) + bc(x - a),$$

$$(x - a)(x^2 - bc - cx + bc).$$

$$(x - a) = 0,$$

$$x_1 = a.$$

$$x^2 - bc - cx + bc = 0,$$

$$x(x - b) - c(x - b) = 0,$$

$$(x - b)(x - c) = 0,$$

$$x - b = 0, x_2 = b$$

$$x - c = 0, x_3 = c.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = a; x_2 = b; x_3 = c.$$

Замечание: корни уравнения можно было легко найти, пользуясь теоремой Виета для кубического уравнения:

$$\text{если } x^3 + px^2 + qx + r = 0, \text{ то}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q,$$

$$x_1x_2x_3 = -r.$$

В нашем случае:

$$x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = ab + bc + cd,$$

$$x_1x_2x_3 = abc.$$

Отсюда следует, что  $x_1 = a; x_2 = b; x_3 = c$ .

## Уравнения, содержащие знак модуля

Пример 1. Решим уравнение.

$$|x| = |3 - 2x| - x - 1.$$

Решение. Выражение  $x$  обращается в нуль при  $x = 0$ , а выражение  $3 - 2x$  — при  $x = 3/2$ . Точки  $0$  и  $3/2$  разбивают числовую ось на промежутки  $(-\infty; 0)$ ,  $[0; 3/2]$ ,  $(3/2; \infty)$ . При  $-\infty < x < 0$  имеем  $x < 0$  и  $3 - 2x > 0$ . Поэтому на этом промежутке  $|x| = -x$ ,  $|3 - 2x| = 3 - 2x$  и уравнение принимает вид  $-x = 3 - 2x - x - 1$ . Решая его, получаем, что  $x = 1$ . Но это значение  $x$  не лежит на  $(-\infty; 0)$ , и потому на этом промежутке уравнение корней не имеет. При  $0 \leq x \leq 3/2$  имеем  $x \geq 0$ ,  $3 - 2x \geq 0$ , поэтому  $|x| = x$ ,  $|3 - 2x| = 3 - 2x$ . И уравнение принимает вид  $x = 3 - 2x - x - 1$ . Решая его, находим  $x = 0,5$ . Так как это значение  $x$  принадлежит промежутку  $[0; 3/2]$ , то  $1/2$  является корнем заданного уравнения. Наконец, на промежутке  $(3/2; +\infty)$  имеем  $x > 0$ ,  $3 - 2x < 0$ , а потому  $|x| = x$ ,  $|3 - 2x| = -(3 - 2x)$  и уравнение принимает вид  $x = -(3 - 2x) - x - 1$ , т.е.  $0 = -4$ . Значит, на этом промежутке нет корней заданного уравнения.

Мы получили, таким образом, что уравнение имеет лишь один корень, а именно  $x = 0,5$ .

Ответ:  $x = 0,5$ .

В некоторых случаях уравнение со знаком модуля имеет бесконечно много решений.

Пример 2.  $|8 - 5x| = |3 + x| + |5 - 6x|$ .

Выражения  $(8 - 5x)$ ,  $(3 + x)$  и  $(5 - 6x)$  обращаются в нуль соответственно в точках  $8/5$ ,  $-3$ ,  $5/6$ . Эти точки разбивают числовую ось на 4 промежутка. При этом, в ходе решения, устанавливаем, что на промежутках  $(-\infty; -3)$ ,  $(5/6; 8/5]$ ,  $(8/5; +\infty)$  уравнение корней не имеет, а на промежутке  $[-3; 5/6]$  оно обращается в тождество  $8 - 5x = 3 + x + 5 - 6x$ . Поэтому ответ имеет вид  $[-3; 5/6]$ .

Ответ:  $[-3; 5/6]$ .

Несколько сложнее решаются уравнения, в которых встречается знак модуля под знаком модуля. Однако и в этом случае метод разбиения оси на промежутки знакопостоянства позволяет решить уравнение.

Пример 3. Решим уравнение  $|2x - 3 - |x + 2|| = 8x + 12$ .

Решение. Выражение  $(x + 2)$  обращается в нуль при  $x = -2$ . Если  $x < -2$ , то  $(x + 2) < 0$  и потому  $|x + 2| = -(x + 2)$ . Значит, на промежутке  $(-\infty; -2)$  заданное уравнение принимает вид  $|2x - 3 + (x + 2)| = 8x + 12$ , т.е.  $|3x - 1| = 8x + 12$ . Но при  $x < -2$  имеем  $3x - 1 < 0$  и потому  $|3x - 1| = -(3x - 1)$ . Получаем уравнение  $-(3x - 1) = 8x + 12$ , имеющее корень  $x = -1$ . Так как это число не лежит на промежутке  $(-\infty; -2)$ , то заданное уравнение не имеет на это промежутке корней.

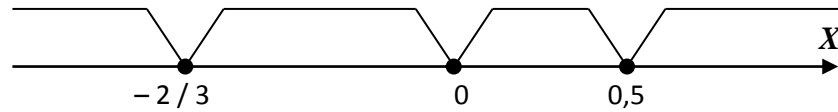
Пусть теперь  $x \geq -2$ . Тогда  $|x + 2| = x + 2$ , и мы получаем уравнение  $|2x - 3 - (x + 2)| = 8x + 12$ , т.е.  $|x - 5| = 8x + 12$ . Здесь надо рассмотреть два случая:  $x < 5$  и  $x \geq 5$ . В первом случае  $|x - 5| = -(x - 5)$ , и потому получаем уравнение  $-(x - 5) = 8x + 12$ . Его корень равен  $-7/9$ . Поскольку  $-2 \leq (-7/9) \leq 5$ , то  $-7/9$  является корнем заданного уравнения. Если же  $x \geq 5$ , то  $|x - 5| = x - 5$  и уравнение принимает вид  $x - 5 = 8x + 12$ . Корнем полученного уравнения является число  $-17/7$ . Поскольку оно не лежит на луче  $[5; +\infty)$ , оно не является корнем заданного уравнения. Итак, решение имеет вид  $x = -7/9$ .

Ответ:  $x = -7/9$ .

Пример 4.

$$|1 - 2x| + |3x + 2| + |x| = 5.$$

Решение. Приравниваем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля, отмечаем на числовой оси полученные значения, исследуем уравнения в каждом из полученных интервалов:

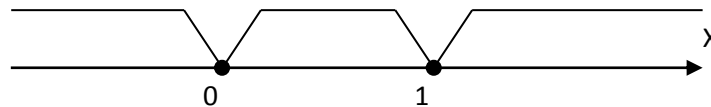


- А) если  $x < -2/3$ , то  $1 - 2x > 0$ ,  $3x + 2 < 0$ ,  $x < 0$  и уравнение переписывается так:  
 $1 - 2x - 3x - 2 - x = 5$ , т.е.  $-6x = 6$ ,  $x = -1 \in (-\infty; -2/3)$ .  
 Б) если  $-2/3 \leq x < 0$ , то  $1 - 2x > 0$ ,  $3x + 2 \geq 0$ ,  $x < 0$  и поэтому имеем:  
 $1 - 2x + 3x + 2 - x = 5$ , и т.к.  $3 \neq 5$ , то в промежутке  $[-2/3; 0)$  корней нет.  
 В) если  $0 \leq x < 0,5$ , то получаем:  $1 - 2x + 3x + 2 + x = 5$ , т.е.  $2x = 2$ ;  $x = 1 \notin [0; 0,5)$ .  
 Г) если  $0,5 \leq x$ , то  $-1 + 2x + 3x + 2 + x = 5$ ,  $6x = 4$ ,  $x = 2/3 \in (0,5; \infty)$ .  
 Ответ:  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 2/3$ .

Пример 5.

$$|x| + |x - 1| = 1.$$

Решение.  $(x - 1) = 0$ ,  $x = 1$ ;  $\Rightarrow$  получаем интервалы:



- А)  $x \in (-\infty; 0)$ , тогда  $-x - x + 1 = 1$ ;  $-2x = 0$ ,  $x = 0 \notin (-\infty; 0)$ .  
 Б)  $x \in [0; 1)$ , тогда  $x - x + 1 = 1$ ;  $1 = 1 \Rightarrow x$  — любое число из  $[0; 1)$ .  
 В)  $x \in [1; \infty)$ , тогда  $x + x - 1 = 1$ ;  $2x = 2$ ;  $x = 1 \in [1; \infty)$ .  
 Ответ:  $x \in [0; 1]$ .

## Рациональные неравенства

### Метод интервалов

Пример 1: Решить неравенство

$$x^4 + 3x^3 - 4x > 0. \quad (*)$$

Решение. Разложим на множители многочлен  $P_4(x)$ , стоящий в левой части неравенства (\*). Вынося множитель  $x$  за скобку, получаем

$$P_4(x) = x(x^3 + 3x^2 - 4).$$

Второй сомножитель, представляющий собой кубический многочлен, имеет корень  $x = 1$ . Следовательно, он может быть представлен в виде

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)(x+2)^2.$$

Таким образом,  $P_4(x) = x(x-1)(x+2)^2$  и неравенство (\*) может быть записано в виде

$$x(x-1)(x+2)^2 > 0. \quad (**)$$

Решим неравенство (\*\*) методом интервалов. При  $x > 1$  все сомножители, стоящие в левой части неравенства, положительны.

Будем двигаться по оси  $O_x$  справа налево. При переходе через точку  $x = 1$  многочлен  $P_4(x)$  меняет знак и принимает отрицательные значения, так как  $x = 1$  — простой корень (корень кратности 1); при переходе через точку  $x = 0$  многочлен также меняет знак и принимает положительные значения, так как  $x = 0$  — также простой корень; при переходе через точку  $x = -2$  многочлен знака не меняет, так как  $x = -2$  — корень кратности 2. Промежутки знакопостоянства многочлена  $P_4(x)$  схематически представлены

на рис 1. Используя этот рисунок, легко выписать множество решений исходного неравенства.

Ответ:  $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (1; \infty)$ .

Пример 2: Решить неравенство

$$(x^2 - 3x - 2)(x^2 - 3x + 1) < 10.$$

Решение: Пусть  $x^2 - 3x - 2 = y$ . Тогда неравенство примет вид  $y(y + 3) < 10$ , или  $y^2 + 3y - 10 < 0$ , откуда  $(y + 5)(y - 2) < 0$ . Решением этого неравенства служит интервал  $-5 < y < 2$ . Таким образом, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 2 < 2, \\ \text{или} \\ x^2 - 3x - 2 > -5, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0, \\ x^2 - 3x + 3 > 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} (x - 4)(x + 1) < 0, \\ (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0. \end{cases}$$

Поскольку второе неравенство выполняется при всех  $x$ , решение этой системы есть интервал  $(-1; 4)$ .

Ответ:  $(-1; 4)$ .

Пример 3: Решить неравенство

$$x^4 - 34x^2 + 225 < 0.$$

Решение. Сначала решим биквадратное уравнение  $x^4 - 34x^2 + 225 < 0$ . Полагая  $x^2 = z$ , получаем квадратное уравнение  $z^2 - 34z + 225 = 0$ , из которого находим:  $z_1 = 9$  и  $z_2 = 25$ . Решая уравнения  $x^2 = 9$  и  $x^2 = 25$ , получаем 4 корня биквадратного уравнения:  $-3, 3, -5, 5$ . Значит,  $x^4 - 34x^2 + 225 = (x + 5)(x + 3)(x - 3)(x - 5)$ , и поэтому заданное неравенство имеет вид:

$$(x + 5)(x + 3)(x - 3)(x - 5) < 0.$$

Изображаем на координатной прямой точки  $-5, -3, 3, 5$  и проводим кривую знаков. Решение неравенства является объединение интервалов  $(-5; -3)$  и  $(3; 5)$ .

Ответ:  $(-5; -3) \cup (3; 5)$ .

Пример 4: Решить неравенство

$$x^4 - 3 < 2x(2x^2 - x - 2).$$

Решение. Дано целое рациональное неравенство. Перенесем все слагаемые в левую часть и приведем многочлен к стандартному виду. Получим равносильное неравенство

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 < 0.$$

Решая уравнение  $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0$ , находим корни  $x_1 = -1, x_{2,3} = 1, x_4 = 3$ . Тогда неравенство можно переписать в виде

$$(x - 1)^2(x + 1)(x - 3) < 0.$$

Найденные корни разбивают числовую ось на четыре промежутка, на каждом из которых левая часть неравенства, а значит, и исходного неравенства сохраняет знак. Выбирая пробные точки в каждом из промежутков (достаточно значения  $x$  подставлять только в последний два множителя), получаем знаки, указанные на рисунке. Видим, что неравенство выполняется на промежутках  $(-1; 1)$  и  $(1; 3)$ .

Так как неравенство строгое, то числа  $-1, 1, 3$  не входят в решение неравенства.

Ответ:  $(-1; 1) \cup (1; 3)$ .

## Дробно-рациональные неравенства

Пример 1: Решить неравенство

$$\frac{x+2}{x^2-x-2} < -1.$$

Решение: Прибавляя к обеим частям неравенства 1, получим неравенство вида (5).

$$\frac{x^2}{x^2-x-2} < 0, \text{ которое эквивалентно неравенству } x^2(x^2-x-2) < 0.$$

Множество решений последнего неравенства находится методом интервалов:

$$x \in (-1; 0) \cup (0; 2).$$

$$\text{Ответ: } x \in (-1; 0) \cup (0; 2).$$

Пример 2: Решить неравенство

$$\frac{x^2+4x-1}{x^2+4x+3} \leq \frac{1}{x+1}.$$

Решение: Перенеся все члены неравенства в левую часть, получим

$$\frac{x^2+4x-1}{(x+1)(x+3)} - \frac{1}{x+1} \leq 0, \text{ или } \frac{x^2+3x-4}{(x+1)(x+3)} \leq 0, \text{ откуда } \frac{(x-1)(x+4)}{(x+1)(x+3)} \leq 0.$$

Пользуясь методом интервалов и учитывая знак неравенства, заключаем, что решением неравенства является объединение полуинтервалов:  $[-4; -3) \cup (-1; 1]$ .

$$\text{Ответ: } [-4; -3) \cup (-1; 1].$$

Пример 3: Решить неравенство:

$$\frac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-6)^4} \leq 0.$$

Решение: Полагая  $x \neq 0$  и  $x \neq 3$ , разделим обе части неравенства на положительную дробь и получим и сразу заметим, что  $x = 0$  удовлетворяет заданному неравенству, а  $x = 3$  не удовлетворяет. Кроме того, множители с нечетными показателями степени заменим соответствующими множителями первой степени (ясно, что при этом знак выражения в левой части неравенства не изменится). В результате получим более простое неравенство, равносильное заданному для всех  $x \neq 0$  и  $x \neq 3$ :

$$\frac{(2x-9)(x-1)}{(x+4)} \leq 0.$$

Начертив кривую знаков, заштрихуем промежутки удовлетворяющие этому неравенству, и отметим на той же оси точки  $x = 0$  и  $x = 3$ . Учитывая, что значение  $x = 0$  является решением заданного неравенства, но не принадлежит заштрихованному промежутку, его следует дополнительно включать в ответ. Значение  $x = 3$  не является решением неравенства, но принадлежит заштрихованному промежутку; следовательно, это значение нужно исключить. Итак, получаем ответ:  $(-\infty; -4) \cup [1; 3) \cup (3; 4,5] \cup \{0\}$ .

$$\text{Ответ: } (-\infty; -4) \cup [1; 3) \cup (3; 4,5] \cup \{0\}.$$

Пример 4: Решить неравенство

$$\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30} < 0.$$

Решение. Разлагая числитель и знаменатель на множители, переписываем данное неравенство в виде

$$\frac{x^2(x-1)(x-2)}{(x-6)(x+5)} < 0.$$

Точками, в которых множители меняют знаки, являются  $-5, 1, 2, 6$ . Они разбивают числовую ось на интервалы  $(-\infty; -5), (-5; 1), (1; 2), (2; 6), (6; +\infty)$ .

С помощью кривой знаков находим интервалы, где выполняется неравенство:  $(-5; 1)$  и  $(2; 6)$ . При этом из  $(-5; 1)$  надо удалить точку  $0$ , так как в этой точке выражение обращается в нуль. Итак, получаем ответ в виде  $(-5; 0) \cup (0; 1) \cup (2; 6)$ .

Ответ:  $(-5; 0) \cup (0; 1) \cup (2; 6)$ .

Пример 5: Решить неравенство

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^3 - 5x^2} < 0.$$

Решение. Разлагая числитель и знаменатель на множители, перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{x^2(x-1)(x-2)}{x^2(x-5)} < 0.$$

Нанесем числа 0, 1, 2, 5, при которых числитель и знаменатель обращаются в нуль, на числовую ось. Они разбивают числовую ось на пять промежутков.

С помощью “пробных” точек найдем знак выражения в каждом промежутке.

Выпишем интервалы, где выполняется неравенство:  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(2; 5)$ .

Ответ:  $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (2; 5)$ .

*Неравенства, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины.*

Пример 1: Решить неравенство

$$|x^2 - 2| + x < 0. \quad (*)$$

Решение: Рассмотрим промежутки знакопостоянства выражения  $x^2 - 2$ , стоящего под знаком абсолютной величины.

1) Предположим, что  $x^2 - 2 \geq 0$ , тогда неравенство (\*) принимает вид  $x^2 + x - 2 < 0$ .

Пересечение множества решений этого неравенства и неравенства  $x^2 - 2 \geq 0$  представляет собой первое множество решений исходного неравенства:  $x \in (-2; -\sqrt{2}]$ .

2) Предположим, что  $x^2 - 2 < 0$ , тогда согласно определению абсолютной величины имеем  $|x^2 - 2| = 2 - x^2$ , и неравенство (\*) приобретает вид  $2 - x^2 + x < 0$ .

Пересечение множества решений этого неравенства и неравенства  $x^2 - 2 < 0$  дает второе множество решений исходного неравенства:  $x \in (-\sqrt{2}; -1)$ .

Объединяя найденные множества решений, окончательно получаем  $x \in (-2; -1)$

Ответ:  $x \in (-2; -1)$ .

Пример 2: Решить неравенство

$$\left| \frac{x-1}{x+2} \right| > 1. \quad (*)$$

Решение: Исходное неравенство при всех  $x \neq -2$  эквивалентно неравенству

$$|x-1| > |x+2|. \quad (**)$$

Возведя обе части неравенства (\*\*) в квадрат, после приведения подобных членов получаем неравенство

$$6x < -3,$$

$$\text{т.е. } x < -1/2.$$

Учитывая множество допустимых значений исходного неравенства, определяемого условием  $x \neq -2$ , окончательно получаем, что неравенство (\*) выполняется при всех  $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1/2)$ .

Ответ:  $(-\infty; -2) \cup (-2; -1/2)$ .

Пример 3: Найти наименьшее целое  $x$ , удовлетворяющее неравенству:

$$\frac{2x+5}{|x+1|} > 1.$$

Решение: Так как  $|x + 1| \geq 0$  и, по условию,  $|x + 1| \neq 0$ , то данное неравенство равносильно следующему:  $2x + 5 > |x + 1|$ . Последнее в свою очередь, эквивалентно системе неравенств  $-(2x + 5) < x + 1 < 2x + 5$ ,

$$\text{откуда } \begin{cases} x > -4, \\ x > -4/3. \end{cases} \quad \begin{cases} -(2x + 5) < x + 1 \\ 2x + 5 > x + 1, \end{cases}$$

Наименьшим целым числом  $x$  удовлетворяющей этой системе будет  $x = 0$ , является 0. Заметим, что  $x \neq -1$ , иначе выражение в левой части данного неравенства не имеет смысла.

Ответ: 0.

Пример 4: Решить неравенство:

$$\frac{-2}{|x|+1} \geq |x| - 2.$$

Решение: Пусть  $|x| = y$ . Заметим далее, что  $|x| + 1 > 0$ . Поэтому данное неравенство эквивалентно следующему:  $-2 \geq (y - 2)(y + 1)$ , или  $y^2 - y \leq 0$ , или  $0 \leq y \leq 1$ , или  $0 \leq |x| \leq 1$ . Отсюда  $-1 \leq x \leq 1$ .

Ответ:  $[-1; 1]$ .

Пример 5: Решить неравенство

$$|x^2 - 3x + 2| + |2x + 1| \leq 5.$$

Решение.  $x^2 - 3x + 2$  отрицателен при  $1 < x < 2$  и неотрицателен при остальных  $x$ ,  $2x + 1$  меняет знак при  $x = -1/2$ . Следовательно, нам надо рассмотреть четыре случая.

1.  $x < -1/2$ . В этом случае  $x^2 - 3x + 2 > 0$ ,  $2x + 1 < 0$ .

Получаем неравенство  $x^2 - 3x + 2 - 2x - 1 \leq 5$ ,  $x^2 - 5x - 4 \leq 0$ .

С учетом условия  $x < -1/2$  находим  $\frac{5 - \sqrt{41}}{2} \leq x \leq -1/2$ .

2.  $-1/2 \leq x \leq 1$ . Имеем неравенство  $x^2 - x - 2 \leq 0$ . Его решение  $-1 \leq x \leq 2$ . Следовательно, весь отрезок  $-1/2 \leq x \leq 1$  удовлетворяет неравенству.

3.  $1 < x < 2$ . Получаем  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ ;  $x \leq 2$  или  $x \geq 3$ . Вновь подходит весь интервал.

4.  $x \geq 2$ . Неравенство то же, что и в случае 2. Подходит лишь  $x = 2$ .

Ответ:  $\frac{5 - \sqrt{41}}{2} \leq x \leq 2$ .

Пример 6: Решить неравенство

$$||x^3 + x - 3| - 5| \leq x^3 - x + 8.$$

Решение. Решим это неравенство не стандартным образом.

$$\begin{cases} |x^3 + x - 3| - 5 \leq x^3 - x + 8, \\ |x^3 + x - 3| - 5 \leq -x^3 + x - 8 \end{cases} \iff \begin{cases} |x^3 + x - 3| \leq x^3 - x + 13 \\ |x^3 + x - 3| \geq -x^3 + x - 3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} x^3 + x - 3 \leq x^3 - x + 13 \\ x^3 + x - 3 \geq -x^3 + x - 13, \end{cases} \\ \begin{cases} x^3 + x - 3 \geq -x^3 + x - 3, \\ x^3 + x - 3 \leq x^3 - x + 3 \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} x \leq 8, \\ x^3 \geq -5, \end{cases} \\ \begin{cases} x^3 \geq 0, \\ x \leq 3 \end{cases} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -\sqrt{3,5} \leq x \leq 8, \\ x - \text{любое} \end{cases} \iff -\sqrt{3,5} \leq x \leq 8.$$

Ответ:  $-\sqrt{3,5} \leq x \leq 8$ .

## Неравенства с параметрами

Пример 1: Решить неравенство:

$$\frac{m^2x + 1}{2} - \frac{m^2x + 3}{3} < \frac{m + 9x}{6}.$$

Решение: Преобразуем данное неравенство:  $3m^2x + 3 - 2mx^2 - 6 < m + 9x$ ;  $mx^2 - 9x < m + 3$ ;  $(m - 3)(m + 3)x < m + 3$ . Далее находим решение неравенства при различных значения параметра  $m$ :

1) Пусть  $(m - 3)(m + 3) > 0$ , т.е.  $m < -3$  или  $m > 3$ . Тогда неравенство имеет решение  $x < 1/(m - 3)$ .

2) Пусть  $(m - 3)(m + 3) < 0$ , т.е.  $-3 < m < 3$ . Тогда неравенство имеет решение  $x > 1/(m - 3)$ .

3) Пусть  $(m - 3)(m + 3) = 0$ , т.е.  $m = 3$  или  $m = -3$ . Тогда если  $m = 3$ , то неравенство примет вид  $0 \cdot x < 6$  и, значит, выполняется при любом  $x \in \mathbb{R}$ . Если же  $m = -3$ , то неравенство примет вид  $0 \cdot x < 0$  и, следовательно, не имеет решения.

Пример 2: Для каждого неотрицательного значения параметра  $a$  решить неравенство  $4a^3x^4 + 4a^2x^2 + 32x + a + 8 \geq 0$ .

Решение. Левая часть неравенства представляет собой многочлен как относительно  $x$ , так и относительно параметра  $a$ . Степени соответственно равны 4 и 3. Однако если умножить многочлен на  $a$ , а затем сделать замену  $y = ax$ , то в новом многочлене максимальная степень параметра  $a$  будет равна 2. Случай  $a = 0$  дает нам ответ  $x \geq -1/4$ . Будем теперь считать, что  $a > 0$ . Умножив обе части неравенства на  $a$  и сделав замену  $y = ax$ , получим

$$4y^4 + 4ay^2 + 32y + a^2 + 8a \geq 0.$$

Левая часть представляет собой квадратный трехчлен относительно  $a$ :

$$a^2 + (4y^2 + 8)a + 4y^2 + 32y \geq 0,$$

$$\frac{1}{4}D = (2y^2 + 4)^2 - 4y^2 - 32y = 16(y - 1)^2.$$

Раскладывая левую часть неравенства на множители, получим

$$(a + 2y^2 + 4y)(a + 2y^2 - 4y + 8) \geq 0,$$

или

$$(2y^2 + 4y + a)(2y^2 - 4y + 8 + a) \geq 0.$$

Второй множитель положителен при всех  $y$ , если  $a > 0$ . Приходим к неравенству  $2y^2 + 4y + a \geq 0$ , откуда, если  $0 < a < 2$ ,  $y \leq \frac{1}{2}(-2 - \sqrt{4 - 2a})$  или  $y \geq \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{4 - 2a})$ ; если  $a \geq 2$ ,  $y$  – любое. Возвращаясь к  $x$ , получим ответ.

Ответ: Если  $a = 0$ , то  $x \geq -1/4$ ; если  $0 < a < 2$ , то  $x \leq 1/2a \cdot (-2 - \sqrt{4 - 2a})$  или

$x \geq 1/2a \cdot (-2 + \sqrt{4 - 2a})$ ; если  $a \geq 2$ , то  $x$  – любое.

Пример 3: Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0, \\ ax^2 - 2(a + 1)x + a - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Решение: Поскольку решением первого неравенства является  $1 \leq x \leq 2$ , то задача сводится (при  $a \neq 0$ ) к выяснению расположения корней квадратного трехчлена  $f(x) = ax^2 - 2(a + 1)x + a - 1$  относительно отрезка  $[1; 2]$ . Имеем

$$\frac{1}{4}D = (a + 1)^2 - a(a - 1) = 3a + 1, f(1) = -3, f(2) = a - 5.$$

Область изменения параметра  $a$  оказалось разделенной на 4 части (не считая граничных точек).

1) Если  $a < -1/3$ , второе неравенство, а следовательно и данная система не имеют решения. То же имеет место и при  $a = -1/3$ .



2) Если  $-1/3 < a < 0$ , то  $f(1) < 0$ ,  $f(2) < 0$ . Для вершины параболы выполняется неравенство  $x_{\text{в}} = \frac{a+1}{a} < 0$  (рис. 1, а). Следовательно, множество решений второго неравенства не содержит точек отрезка  $[1; 2]$ . Система не имеет решения. То же имеет место и при  $a = 0$ .

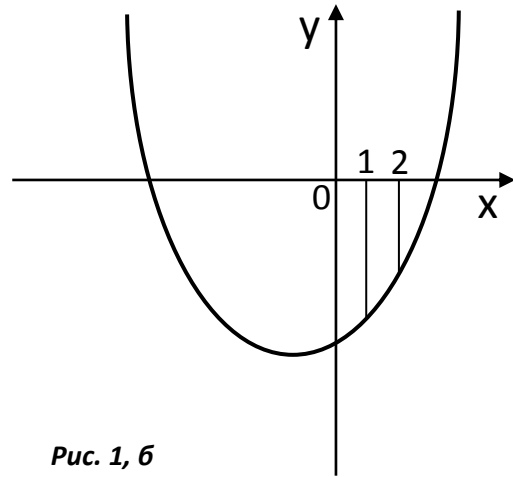
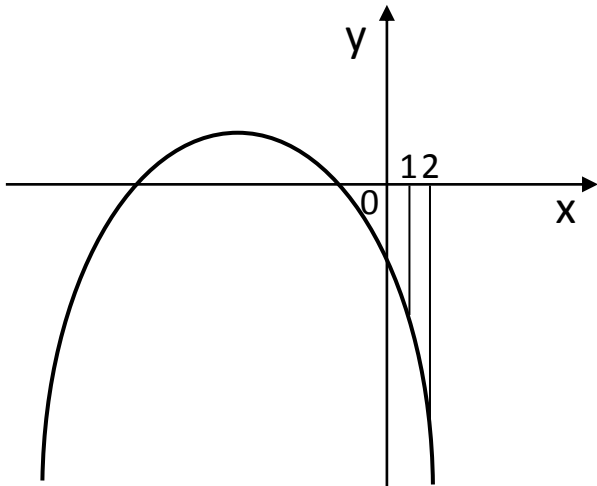


Рис. 1, б

3) Если  $0 < a < 5$ , то  $f(1) < 0$ ,  $f(2) < 0$  (рис. 1, б). Значит, на всем отрезке  $[1; 2]$   $f(x) < 0$ . Система вновь не имеет решения.

4) Если  $a \geq 5$ , то  $f(1) < 0$ ,  $f(2) \geq 0$  (рис. 1, в). Решением системы будет  $x_2 \leq x \leq 2$  где  $x_2$  – больший корень уравнения  $f(x) = 0$ .  
 Ответ: Если  $a < 5$ , система не имеет решения; если  $a \geq 5$ , то  $1/a(a + 1 + \sqrt{3a + 1}) \leq x \leq 2$ .

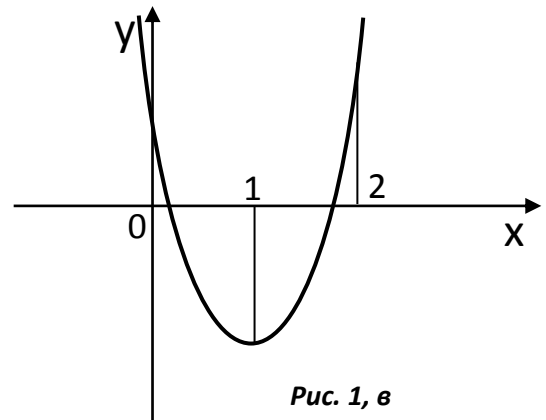


Рис. 1, в

Пример 4: Решить неравенство  $|2x^2 + x - a - 8| \leq x^2 + 2x - 2a - 4$ .

Решить: Напомним, что неравенство  $|a| \leq b$  эквивалентно двойному неравенству  $-b \leq a \leq b$ . В нашем случае после преобразования приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} a \leq -x^2 + x + 4, \\ a \leq x^2 + x - 4. \end{cases}$$

Изобразим на плоскости  $(x; a)$  множество точек, координаты которых удовлетворяют полученной системе. При конкретном значении параметра  $a = \alpha$  решением нашего неравенства будут абсциссы тех точек горизонтальной прямой  $a = \alpha$ , которые находятся в заштрихованной области. Найдем точки пересечения  $A(2; 2)$ ,  $B(-2; -2)$  наших точек парабол и вершину  $C(-0,5; -4,25)$  параболы  $a = x^2 + x - 4$ .

Далее получаем: если  $a > 2$ , то соответствующая прямая пересекается с заштрихованной областью.

Если  $-2 < a \leq 2$ , то соответствующая прямая пересекается с заштрихованной областью по отрезку. Концами этого отрезка будут точки с абсциссами  $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17 + 4a})$  (большой корень уравнения  $a = x^2 + x - 4$  или  $x^2 - x - 4 + a = 0$ ).

Если  $-4\frac{1}{4} \leq a \leq -2$ , то горизонтальная прямая, соответствующая таким  $a$ , пересекается с заштрихованной областью по двум отрезкам. Решением неравенства будет

$$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{17 - 4a}) \leq x \leq -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{17 + 4a}),$$

$$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17 - 4a}) \leq x \leq -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{17 + 4a}).$$

$$\text{Если } a < -4\frac{1}{4}, \text{ то } \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17 - 4a}) \leq x \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17 - 4a}).$$

### Системы рациональных неравенств

Пусть надо найти числовые значения  $x$ , при которых превращаются в верные числовые неравенства одновременно несколько рациональных неравенств. В таких случаях говорят, что надо решить систему рациональных неравенств с одним неизвестным  $x$ .

Чтобы решить систему рациональных неравенств, надо найти все решения каждого неравенства системы. Тогда общая часть всех найденных решений и будет решением системы.

Пример 1: Решить систему неравенств

$$\begin{cases} (x-1)(x-5)(x-7) < 0, \\ \frac{(x-2)(x-3)}{x-4} > 0. \end{cases}$$

Сначала решаем неравенство

$$(x-1)(x-5)(x-7) < 0.$$

Применяя метод интервала, находим, что множество всех решений неравенства (2) состоит из двух интервалов:  $(-\infty, 1)$  и  $(5, 7)$ .

Теперь решим неравенство

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-4} > 0.$$

Применяя метод интервалов, находим, что множество всех решений неравенства (3) также состоит из двух интервалов:  $(2, 3)$  и  $(4, +\infty)$ .

Теперь надо найти общую часть решений неравенств (2) и (3). Нарисуем координатную ось  $x$  и отметим на ней найденные решения. Теперь ясно, что общей частью решений неравенств (2) и (3) является интервал  $(5, 7)$ .

Следовательно, множество всех решений системы неравенств (1) составляет интервал  $(5, 7)$ .

Пример 2: Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 10 < 0, \\ \frac{x^9 - x^3 + x + 2}{x^4 - x^2 + 1} > 0. \end{cases}$$

Решим сначала неравенство

$$x^2 - 6x + 10 < 0.$$

Применяя метод выделения полного квадрата, можно написать, что

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 10 = (x-3)^2 + 1.$$

Поэтому неравенство (2) можно записать в виде

$$(x-3)^2 + 1 < 0,$$

откуда видно, что оно не имеет решений.

Теперь можно не решать неравенство

$$\frac{x^9 - x^3 + x + 2}{x^4 - x^2 + 1} > 0,$$

так как ответ уже ясен: система (1) не имеет решений.

Пример 3: Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x^2 + x - 4}{x} < 1, \\ x^2 < 64. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала первое неравенство; имеем

$$\frac{x^2 + x - 4}{x} - 1 < 0, \frac{(x - 2)(x + 2)}{x} < 0.$$

С помощью кривой знаков находим решения этого неравенства:  $x < -2$ ;  
 $0 < x < 2$ .

Решим теперь второе неравенство заданной системы. Имеем  $x^2 - 64 < 0$ , или  $(x - 8)(x + 8) < 0$ . С помощью кривой знаков находим решения неравенства:  $-8 < x < 8$ .

Отметив найденные решения первого и второго неравенства на общей числовой прямой (рис. 6), найдем такие промежутки, где эти решения совпадают (пересечение решений):  $-8 < x < -2$ ;  $0 < x < 2$ . Это и есть решение системы.

Пример 4: Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 \geq 100x^3; \\ \frac{(x + 9)(5x - x^2 - 18)}{x^2 - 18x + 45} \geq 0. \end{cases}$$

Преобразуем первое неравенство системы:

$$x^3(x - 10)(x + 10) \geq 0, \text{ или } x(x - 10)(x + 10) \geq 0$$

(т.к. множители в нечетных степенях можно заменять соответствующими множителями первой степени); с помощью метода интервалов найдем решения последнего неравенства:  $-10 \leq x \leq 0$ ,  $x \geq 10$ .

Рассмотрим второе неравенство системы; имеем

$$\frac{(x + 9)(x^2 - 5x + 18)}{(x - 3)(x - 15)} \leq 0.$$

Находим  $x \leq -9$ ;  $3 < x < 15$ .

Объединив найденные решения, получим  $x \leq 0$ ;  $x > 3$ .

Пример 5: Найти целочисленные решения системы неравенств:

$$\begin{cases} x + y < 2,5, \\ x - y > -3, \\ y - 1 > 0. \end{cases}$$

Решение: Приведем систему к виду

$$\begin{cases} x + y < 2,5, \\ y - x < 3, \\ y > 1. \end{cases}$$

Складывая первое и второе неравенства, имеем  $y < 2,75$ , а учитывая третье неравенство, найдем  $1 < y < 2,75$ . В этом интервале содержится только одно целое число 2. При  $y = 2$  из данной системы неравенств получим

$$\begin{cases} x < 0,5, \\ x > -1, \end{cases}$$

откуда  $-1 < x < 0,5$ . В этом интервале содержится только одно целое число 0.

Ответ:  $x = 0$ ,  $y = 2$ .

**6. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля знаний, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля знаний, промежуточной аттестации приведен в приложении

## **7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **Перечень основной литературы**

1. Гусев, В. А. Геометрия: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Гусев, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — 280 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08897-7. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.ura.it.ru/bcode/494638>
2. Литвиненко, В.Н., Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. — Москва: Просвещение, 1995. — 352 с. — ISBN 5-87484-023-0; То же [Электронный ресурс]. — URL: <https://uch-lit.ru/matematika-2/dlya-studentov/litvinenko-v-n-mordkovich-a-g-praktiku>

### **Перечень дополнительной литературы**

1. Далингер, В. А. Математика: логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 176 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-05316-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.ura.it.ru/bcode/492730>
2. Далингер, В. А. Математика: тригонометрические уравнения и неравенства: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — 136 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08453-5. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.ura.it.ru/bcode/492901>
3. Далингер, В. А. Математика: задачи с модулем: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 364 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04793-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.ura.it.ru/bcode/492899>

## **8. Перечень современных профессиональных баз данных, информационных справочных систем**

Все обучающиеся университета обеспечены доступом к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам. Ежегодное обновление современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем отражено в листе актуализации рабочей программы.

### **Современные профессиональные базы данных:**

1. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования: <http://fgosvo.ru>
2. Федеральный портал "Российское образование": [www.edu.ru](http://www.edu.ru)

3. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам": [window.edu.ru](http://window.edu.ru)
4. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов: [fcior.edu.ru](http://fcior.edu.ru)
5. Единая коллекция информационно-образовательных ресурсов: [school-collection.edu.ru](http://school-collection.edu.ru)
6. Лекторий Минобрнауки/Минпросвещения России: [https://vk.com/videos-30558759?section=album\\_3](https://vk.com/videos-30558759?section=album_3)
7. ЭБС "Университетская библиотека онлайн": <http://biblioclub.ru>
8. ЭБС «Лань»: <https://e.lanbook.com>

**Информационные справочные системы:**

1. Поисковая система Яндекс <https://yandex.ru/>
2. Поисковая система Рамблер <https://www.rambler.ru/>
3. Поисковая система Google <https://www.google.ru/>
4. Поисковая система Mail.ru <https://mail.ru/>


**9. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине имеется в наличии следующая материально-техническая база:


Аудитории	Программное обеспечение
<ul style="list-style-type: none"> <li>- учебная аудитория для проведения учебных занятий по дисциплине, оснащенная компьютером с выходом в интернет, мультимедиа проектором;</li> <li>- помещение для самостоятельной работы обучающихся, оснащенное компьютерной техникой с возможностью подключения к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ГТТУ;</li> <li>- специализированная аудитория для проведения лабораторных работ по дисциплине, оснащенная набором реактивов и лабораторного оборудования;</li> </ul>	<p>Операционная система            Пакет офисных приложений            Браузер Firefox, Яндекс</p>

## **10. Обучение инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья.**

При необходимости рабочая программа дисциплины может быть адаптирована для обеспечения образовательного процесса инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья. Для этого требуется заявление студента (его законного представителя) и заключение психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК).

Автор (составитель): ст.пр. Солдатова Н.Г. 

Программа одобрена на заседании кафедры математики и экономики  
от 20.05.2022г, протокол № 8

Зав. кафедрой 

Каменских Н.А.

**Министерство образования Московской области  
Государственное образовательное учреждение  
высшего образования Московской области  
«Государственный гуманитарно-технологический университет»**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ  
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ  
АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**Б1.О.07.07**

**Элементарная математика с практикумом по решению задач**

<b>Направление подготовки</b>	<b>44.03.01 Педагогическое образование</b>
<b>Направленность (профиль) программы</b>	<b>Математика</b>
<b>Квалификация выпускника</b>	<b>Бакалавр</b>
<b>Форма обучения</b>	<b>Очная</b>

**Орехово-Зуево  
2022 г.**

## 1. Индикаторы достижения компетенций

Код и наименование компетенции	Наименование индикатора достижения компетенции
ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	<p><b>ОПК-8.1</b> Применяет методы анализа педагогической ситуации, профессиональной рефлексии на основе специальных научных знаний, в том числе в предметной области.</p> <p><b>ОПК-8.2</b> Проектирует и осуществляет учебно-воспитательный процесс с опорой на знания предметной области, психолого-педагогические знания и научно-обоснованные закономерности организации образовательного процесса.</p>
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	<p><b>ПК-1.1</b> Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).</p> <p><b>ПК-1.2</b> Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.</p> <p><b>ПК-1.3</b> Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные.</p>

## 2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Оценка уровня освоения компетенций на разных этапах их формирования проводится на основе дифференцированного контроля каждого показателя компетенции в рамках оценочных средств, приведенных в ФОС.

Оценка «отлично», «хорошо», «зачтено» соответствует **повышенному** уровню освоения компетенции согласно критериям оценивания, приведенных в таблице к соответствующему оценочному средству.

Оценка «удовлетворительно», «зачтено» соответствует **базовому** уровню освоения компетенции согласно критериям оценивания, приведенных в таблице к соответствующему оценочному средству.

Оценка «неудовлетворительно», «не зачтено» соответствует показателю **«компетенция не освоена»**.

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде	Критерии оценивания
1	2	3	4	5
<i>Оценочные средства для проведения текущего контроля</i>				
1)	<b>Тест</b>	Система стандартизированных	Тестовые	Оценка «Отлично»: в тесте



	(показатель компетенции «Знание»)	заданий, позволяющая измерить уровень <b>знаний</b> .	задания	<p>выполнено более 90% заданий.</p> <p>Оценка «<i>Хорошо</i>»: в тесте выполнено более 75 % заданий.</p> <p>Оценка «<i>Удовлетворительно</i>»: в тесте выполнено более 60 % заданий.</p> <p>Оценка «<i>Неудовлетворительно</i>»: в тесте выполнено менее 60 % заданий.</p>
2)	<b>Презентация</b>  (показатель компетенции «Умение»)	Работа, направленная на выполнение комплекса учебных и исследовательских задач.	Тематика презентаций	<p>Оценка «<i>Отлично</i>»: показано <b>умение</b> критического анализа информации. Содержание презентации полностью соответствует заявленной теме, рассмотрены дискуссионные вопросы по проблеме, слайды расположены логично, последовательно, завершается презентация четкими выводами. Присутствуют иллюстративно-аналитические материалы (таблицы, диаграммы, схемы и т. д.).</p> <p>Оценка «<i>Хорошо</i>»: показано умение критического анализа информации. Содержание презентации полностью соответствует заявленной теме, но тема раскрыта недостаточно полно, при оформлении презентации имеются недочеты. Присутствуют иллюстративно-аналитические материалы (таблицы, диаграммы, схемы и т. д.).</p> <p>Оценка «<i>Удовлетворительно</i>»: не показано умение критического анализа информации. Содержание презентации не в полной мере соответствует заявленной теме, тема раскрыта недостаточно полно, нарушена логичность и последовательность в расположении слайдов. Иллюстративно-аналитические материалы не представлены.</p> <p>Оценка «<i>Неудовлетворительно</i>»: презентация не соответствует заявленной теме, материал изложен непоследовательно, язык презентации не отражает научного стиля.</p>

3)	<b>Расчетная работа (решение задач)</b>  (показатель компетенции «Владение»)	Средство проверки <b>владения</b> навыками применения полученных знаний по заранее определенной методике для решения задач.	Задачи	Оценка <i>«Отлично»</i> : продемонстрировано понимание методики решения задачи и ее применение. Решение качественно оформлено (аккуратность, логичность). Использован нетрадиционный подход к решению задачи.  Оценка <i>«Хорошо»</i> : продемонстрировано понимание методики решение и ее применение. Решение задачи оформлено.  Оценка <i>«Удовлетворительно»</i> : продемонстрировано понимание методики решения и частичное ее применение.  Оценка <i>«Неудовлетворительно»</i> : задача не решена.
<i>Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации</i>				
	<b>Зачет</b>	Контрольное мероприятие, которое проводится по окончании изучения дисциплины.	Вопросы к зачету	<i>«Зачтено»</i> : <b>знание</b> теории вопроса, понятийно-терминологического аппарата дисциплины (состав и содержание понятий, их связей между собой, их систему);  <b>умение</b> анализировать проблему, содержательно и стилистически грамотно излагать суть вопроса;  <b>владение</b> аналитическим способом изложения вопроса, навыками аргументации.  <i>«Не зачтено»</i> : <b>знание</b> вопроса на уровне основных понятий;  <b>умение</b> выделить главное, сформулировать выводы не продемонстрировано;  <b>владение</b> навыками аргументации не продемонстрировано.
	<b>Экзамен</b>	Контрольное мероприятие, которое проводится по окончанию изучения дисциплины в виде, предусмотренном учебным планом.	Вопросы к экзамену	Оценка <i>«отлично»</i> предполагает: – знание понятийно-терминологического аппарата дисциплины: состав и содержание научных понятий, их связей между собой, их систему; – знание теории вопроса,

				<p>умение анализировать проблему;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– умение применять основные положения теории вопроса, аналитическое изложение научных идей отечественных и зарубежных ученых;</li> <li>– умение содержательно и стилистически грамотно излагать суть вопроса;</li> <li>– глубокое понимание, осознание материала.</li> </ul> <p>Оценка <i>«хорошо»</i> предполагает:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– знание основных теоретических положений вопроса;</li> <li>– умение анализировать изучаемые дисциплиной явления, факты, действия;</li> <li>– умение содержательно и стилистически грамотно излагать суть вопроса. Но имеет место недостаточная полнота по излагаемому вопросу.</li> </ul> <p>Оценка <i>«удовлетворительно»</i> предполагает:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– неполноту изложения информации;</li> <li>– оперирование понятий на бытовом уровне;</li> <li>– отсутствие связи в построении ответа;</li> <li>– неумение выделить главное;</li> <li>– отсутствие выводов.</li> </ul> <p>Оценка <i>«неудовлетворительно»</i> предполагает:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– незнание понятийного аппарата;</li> <li>– незнание методологических основ проблемы;</li> <li>– незнание теории и истории вопроса;</li> <li>- отсутствие умения анализировать учебный материал.</li> </ul>
--	--	--	--	---

**3. Типовые контрольные задания и/или иные материалы для проведения текущего контроля знаний, промежуточной аттестации, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и/или опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы.**

**Задания для проведения текущего контроля знаний  
Тестовые задания**

1) Решить уравнение:  $\frac{x-1}{x-1} = 1$ .

- А) 0,
- Б) 1,
- В) Нет решений,
- Г)  $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ .

2) Решить уравнение:  $\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 1} = 0$ .

- А) Нет решений,
- Б) -1,
- В) -5,
- Г) -1; -5.

3) Решить уравнение:  $\frac{2x-3}{x-3} + \frac{5-x}{x-3} - \frac{x+2}{x-3} = 0$ .

- А) -2;  $\frac{3}{2}$ ; 5,
- Б) Нет решений,
- В)  $x \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$ ,
- Г)  $x \in \mathbb{R}$ .

4) Решить уравнение:  $ax = 1$ .

- А) Если  $a \neq 0$ , то  $x \in \mathbb{R}$ ; если  $a = 0$ , то нет решений,
- Б) Если  $a = 0$ , то нет решений; если  $a \neq 0$ , то  $x = \frac{1}{a}$ ,
- В) Если  $a = 0$ , то  $x \in \mathbb{R}$ ; если  $a \neq 0$ , то  $x = \frac{1}{a}$ .
- Г) Нет решений.

5) При каких  $a$  уравнение  $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$  имеет более одного корня?

- А)  $-4 < a < 0$ ,
- Б)  $0 < a < 1$ ,
- В)  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ ,
- Г)  $-4 < a < 0$ ;  $0 < a < 1$ .

6) При каких  $a$  уравнение  $(a-2)x^2 + (4-2a)x + 3 = 0$  имеет единственное решение?

- А) 2,
- Б)  $a \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ ,
- В) 5,
- Г) -4.

7) Решить уравнение:  $|x^2 - 1| + |a(x - 1)| = 0$ .

- А) Если  $a \neq 0$ , то  $x = 1$ ; если  $a = 0$ , то  $x = \pm 1$ ,

Б) Если  $a \neq 0$ , то нет решений; если  $a = 0$ , то  $x = 1$ .

В)  $x = \pm 1$ ,

Г) Нет решений.

8) Решить систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0. \end{cases}$$

А) (4; 3), (4; -3),

Б) (1; 2),

В) Нет решений,

Г)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y = \pm 3$ .

9) Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ x^2 - 2xy + 1 = 0. \end{cases}$$

А) (1; -1), (5; 5)

Б) Нет решений,

В) (1; 1),

Г) (-2; 3), (3; -2).

10) При каких  $a$  неравенство  $2x + a > 0$  является следствием неравенства  $x + 1 - 3a > 0$ ?

А)  $\frac{2}{7}$ ,

Б)  $a \geq \frac{2}{7}$ ,

В) при любых  $a$ ,

Г)  $a \leq \frac{2}{7}$ .

11) Найти наибольшее целое  $x$ , удовлетворяющие неравенству:

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1.$$

а)  $x \in (-\infty; -3,5)$ ,

б) -3,

в) -4,

г) нет решений.

12) Найти наибольшее целое  $x$ , удовлетворяющие неравенству:

$$\frac{5x-1}{4} - \frac{8x-3}{5} > -\frac{3}{2}.$$

а) 5,

б) -3,

в) 4,

г) нет решений.

13) Найти целочисленные решения неравенств:

$$\frac{7x - 15}{3x + 3} < 0.$$

а) 0, 1, 2,

б) 4, 5,

в) 7,

г) нет решений.

14) Найти целочисленные решения неравенств:

$$\begin{cases} 17 - 4x < 0, \\ 10x - 67 < 0. \end{cases}$$

а) 5,

б) -3, -4, -5,

в) 5, 6,

г) нет решений.

15) Решить неравенство:

$$\frac{x}{9} - \frac{1}{x} < 0.$$

а)  $(-\infty; -3) \cup (0; 3)$ ,

б)  $(-3, 0) \cup (0; \infty)$ ,

в) (5; 7),

г) нет решений.

16) Решить неравенство:

$$\frac{4}{x - 5} < -\frac{5}{x}.$$

а)  $(-\infty; -3/25) \cup (0; \infty)$ ,

б)  $(-12, 0) \cup (7; 9)$ ,

в)  $(-\infty; 0) \cup (\frac{25}{9}; 5)$ ,

г) нет решений.

17) Решить неравенство:

$$\frac{19x + 53}{x^2 - 4x + 3} < -1.$$

а)  $(-9; -5) \cup (0; 8)$ ,

б)  $(-8, -7) \cup (1; 3)$ ,

в)  $(-\infty; -7) \cup (1; 3)$ ,

г) нет решений.

18) Решить неравенство:

$$\frac{2x^2 - 7x + 41}{x^2 + 7x + 12} \leq \frac{x + 2}{x + 4}.$$

а)  $[-4; -2) \cup (0; 5]$ ,

б)  $(-1, 0] \cup [1; 7)$ ,

в)  $(-4; -3) \cup [5; 7]$ ,

г) нет решений.

19) Решить неравенство

$$|1,5 - 3x| < 3.$$

а)  $(-2,5; -2) \cup (0; 3,5]$ ,

б)  $(-0,5; 1,5)$ ,

в)  $(-4,5; -3,5)$ ,

г) нет решений.

20) Решить неравенство:

$$\frac{6}{|x+2|+5} > |x+2|.$$

а)  $(-3; -1)$ ,

б)  $(0; 1)$ ,

в)  $(-7; -10)$ ,

г) нет решений.

Ответы: 1 – Г; 2 – В; 3 – В; 4 – Б; 5 – Г; 6 – В; 7 – А; 8 – А; 9 – В; 10 – Б;  
11 – В; 12 – А; 13 – А; 14 – В; 15 – А; 16 – В; 17 – Б; 18 – В; 19 – Б; 20 – А.

### Тематика презентаций

1. Тождественные преобразования рациональных выражений
2. Тождественные преобразования дробно-рациональных выражений
3. Тождественные преобразования иррациональных выражений.
4. Тождественные преобразования показательных выражений
5. Тождественные преобразования логарифмических выражений
6. Решение алгебраических уравнений и неравенств
7. Решение рациональных уравнений и неравенств
8. Решение иррациональные уравнений и неравенств
9. Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля
10. Решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля
11. Решение логарифмических уравнений и неравенств
12. Решение показательных уравнений и неравенств
13. Решение уравнений и неравенств с параметрами
14. Преобразование тригонометрических выражений
15. Доказательство тождеств и неравенств
16. Решение тригонометрических уравнений и неравенств
17. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями
18. Решение уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями
19. Треугольники. Признаки равенства треугольников
20. Медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника
21. Измерение отрезков и углов. Соотношения между сторонами и углами треугольника
22. Биссектриса угла, серединный перпендикуляр к отрезку
23. Многоугольники. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция: определения, свойства и признаки
24. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции
25. Теорема Пифагора. Теоремы синусов и косинусов. Теорема Стюарта
26. Подобие треугольников
27. Окружность. Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей
28. Центральные и вписанные углы
29. Углы между хордами, секущими и касательными
30. Свойства хорд, секущих и касательных. Теорема Птолемея
31. Вписанные и описанные треугольники. Внеписанные окружности

32. Вписанные и описанные четырехугольники. Правильные многоугольники
33. Длина окружности и площадь круга
34. Параллельность прямых в пространстве
35. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей
36. Угол между прямыми в пространстве
37. Перпендикулярность прямых. Перпендикулярность прямой и плоскости
38. Теорема о трех перпендикулярах. Расстояние между прямыми и плоскостями
39. Многогранники. Тетраэдр, пирамида и их свойства
40. Параллелепипед, призма и их свойства
41. Усеченная пирамида. Сечения выпуклых многогранников
42. Вписанные и описанные сферы
43. Цилиндр. Конус. Усеченный конус. Шар
44. Комбинации многогранников и круглых тел
45. Объем параллелепипеда, призмы, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара
46. Площадь поверхности цилиндра, конуса, усеченного конуса, сферы и ее частей

### Задачи

#### Расчетная работа 1

##### Вариант 1

1. Решить уравнения.

$$|x-2| + |x+1| + 3|x+2| = 0$$

$$\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$$

2. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2} * \sqrt[4]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2} * \sqrt[4]{9-4\sqrt{5}} + a}$$

3. Решить неравенства: а)  $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} < 0$ ;

б)  $|x-1| + |2x+1| > 3+x$ ;

в)  $5^{2x+1} > 5^x + 4$ ;

г)  $\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} \geq 2$ ;

д)  $\sqrt{3x-2} > 1$ .

##### Вариант 2

1. Решить уравнения

$$|x^2-9| + |x-2| = 5$$

$$\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2+18} = 5$$

2. Упростить выражение

$$\frac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}} * \sqrt[6]{5+2\sqrt{6}} + \frac{1}{a} + a}$$

3. Решить неравенства:

а)  $\frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 + x - 1} < 0$ ;



$$\text{б) } \left| \frac{x+2}{2x-3} \right| < 3;$$

$$\text{в) } 4^{5+4x} - 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3+4x} + 8 \geq 0;$$

$$\text{г) } \log_2(2-3x) > 4x+1;$$

$$\text{д) } \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1-x.$$

## Расчетная работа 2

1. Решить неравенства:

$$\text{а) } \log_a^2 x^2 > 1$$

$$\text{б) } \log_x(a^2 + 1) < 0$$

$$\text{в) } \frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1$$

$$\text{г) } (\log_2 x - 1) \log_2 x + a > 0$$

$$\text{д) } \log_a(x+1) > 2 \log_x a$$

$$\text{е) } \lg x + \lg(x-2a) - \lg(3x-4a) > \lg a$$

2. При каких  $a$  неравенства выполняются при любых значениях  $x \in R$

$$\text{а) } 1 + \log_7(x^2 + 1) \geq \log_7(ax^2 + 4x + a)$$

$$\text{б) } \log_{a(a+2)}(|x| + 3) > 1$$

3. При каких  $a$  среди решений неравенства содержится единственное целое число?

$$\text{а) } \log_{\frac{1}{3}}(8-x) - \log_3 \frac{|x-7|}{(x-3)} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{|x-5|(x-3)}{3(8-x)} < a$$

$$\text{б) } \log_3(x-4) + \log_3 \frac{|x-5|}{(9-x)} + \log_3 \frac{|x-7|(9-x)}{(x-4)} > a$$

4. Решить систему:

$$\text{а) } \begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \\ x + y = a^2 + a \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_a \left(1 + \frac{x}{y}\right) = 2 - \log_a y \\ \log_a x + \log_a y = 4 \end{cases}$$

5. При каких  $a$  система имеет решение?

$$\text{а) } \begin{cases} \log_2 y + \log_2(x+1) = 2 \\ y = a - 4x \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_a x \left(\frac{1}{\log_x 3} + \log_3 y\right) = \log_3 x \\ \log_3 x \cdot \log_2(x+y) = 2 \log_2 x \end{cases}$$

6. При каких  $a$  система имеет единственное решение?

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ \log_2(4x + y + 3a) - \log_2(x + y) = 2 \end{cases}$$

7. При каких  $a$  система

$$\begin{cases} \sin(3(a-y)) + 3\sin x = 0 \\ 2\log_4(a-y) + 2\log_4(2\sqrt{y}) = \log_2 \sqrt{y} + 3\log_8(2x) \end{cases}$$

имеет четное число решений?

8. При каких  $a > 0$  точка  $x = 3$  является точкой минимума функции  
 $f(x) = 2x^3 - 6a^2x + 3$
9. При каких значениях параметра  $m$  точки экстремумов функции  
 $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - 4$   
 лежат в промежутке  $(-2; 4)$
10. Найти все значения  $\nu$ , при которых функция  
 $f(x) = \nu x^5 - 20x^3 + 5(\nu + 9)x - 7$   
 монотонна при всех  $x \in \mathbb{R}$
11. Найти все значения параметра  $a$ , при которых функция  
 $y = (a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$   
 монотонно убывает на всей числовой оси.
12. При каких значениях  $a$  функция  
 $f(x) = 2ax^3 + 3(a+1)x^2 + 6x - 2$   
 убывает на отрезке  $\left[-1; -\frac{1}{3}\right]$
13. Найти все  $a$ , при которых касательные, проведенные к графику функции  
 $f(x) = x^3 - ax^2$  в точках пересечения графика с осью абсцисс,  
 пересекаются под углом  $\frac{\pi}{4}$
14. Сколько корней в зависимости от параметра  $a$  имеет уравнение  
 $x^5 + x = a + 2x^3$
15. Сколько решений имеет уравнение  
 $x^2 - 2ax - 1 = 0$   
 на промежутке  $|x| < 2$ ?
16. Найти все значения  $a$ , при которых уравнение  
 $x|x + 2a| + 1 - a = 0$   
 имеет единственное решение.
17. При каких  $a$  уравнение  
 $x^3 + ax + 2 = 0$   
 имеет три корня?
18. Определить как расположены корни уравнения  
 $ax^2 - 3(a+1)x + 2a + 7 = 0$   
 относительно отрезка  $[-1; 4]$

### Расчетная работа 3

Вариант 1

- Найдите  $\cos x$ , если  $\sin x = \frac{12}{13}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .
- Исследовать функцию на четность.
  - $f(x) = \frac{\cos x^3}{4 - x^2}$ ;

б)  $f(x) = x^5 \cdot \cos 3x$ .

3. Построить и прочесть график функции.

$$y = 2 \sin x.$$

4. Вычислить:

а)  $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3}$ ;

б)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$ .

5. Решить уравнение:

$$2 \cos x + \sqrt{3} = 0.$$

6. Упростить:

$$\frac{\cos(\pi - t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin(2\pi - t) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)}.$$

7. Доказать тождество:  $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ .

## Вариант 2

1. Найдите  $\sin x$ , если  $\cos x = -\frac{5}{13}$ ,  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ .

2. Исследовать функцию на четность.

а)  $f(x) = \frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)}$ ;

б)  $f(x) = x^4 \cdot \cos 2x$ .

3. Построить и прочесть график функции.

$$y = 3 \cos x.$$

4. Вычислить:

а)  $\sin \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}$ ;

б)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$ .

5. Решить уравнение:

$$2 \cos x - \sqrt{2} = 0.$$

6. Упростить:

$$\frac{\sin(\pi + t) \cdot \sin(2\pi + t)}{\operatorname{tg}(\pi + t) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)}.$$

7. Доказать тождество:  $\frac{\sin^2 t}{1 + \cos t} + \sin t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$

## Расчетная работа 4

### Вариант 1

1. Решить уравнение  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ .

2. Решить уравнение  $2 \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$ .
3. Решить уравнение  $\cos x - \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi + x) = 0$ .

Вариант 2

1. Решить уравнение  $\sin(-x) = \sin 2\pi$ .
2. Решить уравнение  $\cos(3\pi + x) - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sqrt{2}$ .
3. Решить уравнение  $2 \cos(\frac{\pi}{4} + x) = \sqrt{2}$

### Расчетная работа 5

Вариант 1

1. Упростить выражение:  
 $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ$ .
2. Вычислить:  
 $\sin 2x, \cos 2x, \operatorname{tg} 2x, \operatorname{ctg} 2x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$   
 $0 < x < \frac{\pi}{2}, \cos x = \frac{5}{13}$ .
3. Решить уравнение:  
 $1 - \cos 6x = \operatorname{tg} 3x$ .
4. Решить уравнение:  
 $\sin z + \sin 2z + \sin 3z = \cos z + \cos 2z + \cos 3z$ .
5. Решить уравнение:  
 $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\cos 4x}$ .

Вариант 2

1. Упростить выражение:  
 $\sin 84^\circ \sin 24^\circ \sin 48^\circ \sin 12^\circ$ .
2. Вычислить:  
 $\cos(\alpha + \beta)$ , если  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ .
3. Решить уравнение:  
 $\sin 9x = 2 \sin 3x$ .
4. Решить уравнение:  
 $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = 1,5$ .
5. Решить уравнение:  
 $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\cos 4x}$

### Расчетная работа 6

Вариант 1

1. Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника и одинаково удалённая от его катетов, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40 см. Найти катеты.

- Доказать, что если в треугольнике отношение тангенсов двух углов равно отношению квадратов синусов этих углов, то треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.
- Доказать, что если две стороны и высота одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.
- Перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на диагональ, делит диагональ на отрезки 6 и 15 см. Найти стороны и диагонали параллелограмма, если известно, что разность сторон равна 7 см.
- Один из углов трапеции равен  $30^\circ$ , боковые стороны перпендикулярны. Найти меньшую боковую сторону трапеции, если её средняя линия равна 10 см., а одно из оснований 8 см.

#### Вариант 2

- Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами  $a$  и  $b$ .
- Доказать, что если в треугольнике выполняется соотношение  $a/\cos A = b/\cos B$ , то треугольник равнобедренный.
- Определить вид треугольника, если известно, что его медианы связаны равенством  $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$ .
- Диагональ прямоугольника делит его угол в отношении  $m : n$ . Найти отношение периметра прямоугольника к его диагонали.
- Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании и имеют длины 13 и 15 см. Найти стороны трапеции, если её высота равна 12 см.

### Расчетная работа 7

#### Вариант 1

- Две окружности внешне касаются в точке  $A$ ,  $BC$  – их общая внешняя касательная. Доказать, что  $\angle BAC = 90^\circ$ .
- В прямоугольном треугольнике с катетами 18 и 24 см. найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностями.
- Основания трапеции 30 и 12 см., диагонали 20 и 34 см. Найти площадь трапеции.
- В четырёхугольнике  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  – соответственно середины сторон  $AD$  и  $BC$ . Доказать, что  $2MN \leq AB + CD$ .
- В треугольнике  $ABC$  площадь равна  $S$  и  $\angle B = \beta$ . Найти наименьшее значение суммы сторон  $AB$  и  $BC$ .

#### Вариант 2

- $AB$  и  $CD$  – взаимно перпендикулярные пересекающиеся хорды окружности радиуса  $R$ . Доказать, что  $AC^2 + BD^2 = 4R^2$ .
- В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 24 и 36 см. Найти катеты.
- Основания трапеции 62 и 20 см., боковые стороны 45 и 39 см. Найти площадь трапеции.
- В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $CC_1$ . Доказать, что  $CC_1 < (CA + CB)/2$ .
- В треугольнике  $ABC$  площадь равна  $S$  и  $\angle B = \beta$ . Найти наименьшее значение периметра треугольника.

### Расчетная работа 8

#### Вариант 1

1. Точка  $P$ ,  $Q$  и  $R$  взяты на поверхности параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  следующим образом: точка  $P$  лежит в грани  $CC_1 D_1 D$ , точка  $Q$  – в грани  $AA_1 D_1 D$ , точка  $R$  – на прямой  $BB_1$ . Построить сечение параллелепипеда плоскостью  $PQR$ .
2. Точка  $K$  – середина ребра  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми  $A_1 D$  и  $D_1 K$ .
3. Основанием пирамиды является правильный  $\triangle ABC$ . Ее боковое ребро  $SB$  перпендикулярно плоскости основания, и  $SB=AB$ . На ребре  $SA$  взята точка  $D$  такая, что  $SD:SA=1:3$ . Найдите угол между прямой  $BD$  и плоскостью  $SAC$ .

#### Вариант 2

1. Точка  $P$ ,  $Q$  и  $R$  взяты на поверхности параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  следующим образом: точка  $P$  лежит на диагонали  $A_1 C_1$ , точка  $R$  на ребре  $BB_1$ , а точка  $Q$  – на ребре  $DD_1$ . Построить сечение параллелепипеда плоскостью  $PQR$ .
2. Все плоские углы при вершине  $S$  правильной треугольной пирамиды  $SABC$  прямые. Найдите угол между прямыми  $SC$  и  $AD$ , где  $D$  – середина ребра  $BC$ .
3. Основанием прямого параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , является параллелограмм  $ABCD$  с углом при вершине  $A$ , равным  $60^\circ$ . Точка  $O$  – точка пересечения диагоналей основания. Найти угол между прямой  $B_1 O$  и плоскостью  $CC_1 D_1$ , если  $AB:AD:AA_1=1:2:1$ .

### Задания для проведения промежуточной аттестации

#### Вопросы к зачету

1. Рациональные и дробно-рациональные выражения.
2. Иррациональные выражения.
3. Показательные и логарифмические выражения.
4. Алгебраические, рациональные и иррациональные уравнения и неравенства.
5. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.
6. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.
7. Уравнения и неравенства с параметрами.
8. Преобразование тригонометрических выражений, доказательство тождеств и неравенств.
9. Тригонометрические уравнения и неравенства.
10. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями, доказательство тождеств и неравенств.
11. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями.
12. Треугольники. Признаки равенства треугольников.
13. Медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника.
14. Измерение отрезков и углов. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Биссектриса угла, серединный перпендикуляр к отрезку.
15. Многоугольники. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция: определения, свойства и признаки.
16. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции.
17. Теорема Пифагора. Теоремы синусов и косинусов. Теорема Стюарта.
18. Подобие треугольников.
19. Окружность. Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей.
20. Центральные и вписанные углы.

#### Вопросы к экзамену

1. Углы между хордами, секущими и касательными.
2. Свойства хорд, секущих и касательных. Теорема Птолемея.
3. Вписанные и описанные треугольники. Вневписанные окружности.
4. Вписанные и описанные четырехугольники. Правильные многоугольники.
5. Длина окружности и площадь круга.

6. Параллельность прямых в пространстве.
7. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.
8. Угол между прямыми в пространстве.
9. Перпендикулярность прямых. Перпендикулярность прямой и плоскости.
10. Теорема о трех перпендикулярах. Расстояние между прямыми и плоскостями.
11. Многогранники. Тетраэдр, пирамида и их свойства.
12. Параллелепипед, призма и их свойства.
13. Усеченная пирамида. Сечения выпуклых многогранников.
14. Вписанные и описанные сферы.
15. Цилиндр. Конус. Усеченный конус. Шар.
16. Комбинации многогранников и круглых тел.
17. Объем параллелепипеда, призмы, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара.
18. Площадь поверхности цилиндра, конуса, усеченного конуса, сферы и ее частей.

**Схема соответствия типовых контрольных заданий и оцениваемых знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

<i>Формируемая компетенция</i>	<i>Показатели сформированности компетенции</i>	<i>Типовое контрольное задание</i>
ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ОПК-8.1	Тест Вопросы к зачету Вопросы к экзамену
	ОПК-8.2	Презентация Вопросы к зачету Вопросы к экзамену
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1.1	Вопросы к зачету Вопросы к экзамену
	ПК-1.2	Тест Задачи Вопросы к зачету Вопросы к экзамену
	ПК-1.3	Презентация  Вопросы к зачету  Вопросы к экзамену